Pontos racionais em curvas planas singulares sobre corpos finitos

Nazar Arakelian

25 de setembro de 2015

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N_m o número de pontos $\mathbb{F}_{q^m}$-racionais de $\mathcal{X}$.

Hasse-Weil (1948):

$$|N_m(\mathcal{X}) - (q^m + 1)| \leq 2g\sqrt{q^m}.$$

Serre (1983):

$$N_m(\mathcal{X}) \leq q^m + 1 + g\left\lfloor 2\sqrt{q^m} \right\rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N_m o número de pontos $\mathbb{F}_{q^m}$-racionais de $\mathcal{X}$.

Hasse-Weil (1948):

$$|N_m(\mathcal{X}) - (q^m + 1)| \leq 2g\sqrt{q^m}.$$

Serre (1983):

$$N_m(\mathcal{X}) \leq q^m + 1 + g\left\lfloor 2\sqrt{q^m} \right\rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N_m o número de pontos $\mathbb{F}_{q^m}$-racionais de $\mathcal{X}$.

Hasse-Weil (1948):

$$|N_m(\mathcal{X}) - (q^m + 1)| \leq 2g\sqrt{q^m}.$$

Serre (1983):

$$N_m(\mathcal{X}) \leq q^m + 1 + g\left\lfloor 2\sqrt{q^m} \right\rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Seja $\mathcal{X}$ uma curva algébrica projetiva irredutível não singular de gênero g, definida sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$ de $q = p^h$ elementos, onde p é um número primo. Denote por N_m o número de pontos $\mathbb{F}_{q^m}$-racionais de $\mathcal{X}$.
Hasse-Weil (1948):

$$|N_m(\mathcal{X}) - (q^m + 1)| \leq 2g\sqrt{q^m}.$$

Serre (1983):

$$N_m(\mathcal{X}) \leq q^m + 1 + g\left\lfloor 2\sqrt{q^m} \right\rfloor.$$

Cotas para pontos racionais em curvas

Stöhr-Voloch(1987):

$$N_m(\mathcal{F}) \leq \frac{(\nu_1 + \cdots + \nu_{r-1})(2g-2) + (q^m + r)n}{r}, \qquad (1)$$

onde $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ é modelo de $\mathcal{X}$ de grau n.

Cotas para pontos racionais em curvas

A.-Borges(2013? 2014? 2015? 2016...):

$$\begin{aligned} & (c_1 - c_u - c_m - c_{m-u})N_1(\mathcal{F}) \\ + \; & c_u N_u(\mathcal{F}) + c_m N_m(\mathcal{F}) + c_{m-u} N_{m-u}(\mathcal{F}) \\ \leq \; & (\kappa_0 + \cdots + \kappa_{r-2})(2g-2) + (q^u + q^m + r - 1)n, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ é modelo de $\mathcal{X}$ de grau n, $c_u \geq 1$, $c_m \geq 1$, $c_1 \geq q^u + 2(r-1)$ e $c_{m-u} \geq q^u$.

Sistemas lineares em curvas singulares

Seja $\mathcal{F}$ curva plana de grau d e gênero g. Sejam $P_1, \ldots, P_k$ singularidades de $\mathcal{F}$ com multipl. $r_1, \ldots, r_k$, resp.

$$g \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} r_i(r_i - 1). \qquad (3)$$

$$h = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i + 1) \geq 0. \qquad (4)$$

Para a g_n^r cortada por Σ_t, temos $r \geq h$

Sistemas lineares em curvas singulares

Seja $\mathcal{F}$ curva plana de grau d e gênero g. Sejam $P_1, \ldots, P_k$ singularidades de $\mathcal{F}$ com multipl. $r_1, \ldots, r_k$, resp.

$$g \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} r_i(r_i - 1). \tag{3}$$

$$h = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i+1) \geq 0. \tag{4}$$

Para a g_n^r cortada por Σ_t, temos $r \geq h$

Sistemas lineares em curvas singulares

Seja $\mathcal{F}$ curva plana de grau d e gênero g. Sejam $P_1, \ldots, P_k$ singularidades de $\mathcal{F}$ com multipl. $r_1, \ldots, r_k$, resp.

$$g \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} r_i(r_i - 1). \tag{3}$$

$$h = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i+1) \geq 0. \tag{4}$$

Para a g_n^r cortada por Σ_t, temos $r \geq h$

Sistemas lineares em curvas singulares

Seja $\mathcal{F}$ curva plana de grau d e gênero g. Sejam $P_1, \ldots, P_k$ singularidades de $\mathcal{F}$ com multipl. $r_1, \ldots, r_k$, resp.

$$g \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} r_i(r_i - 1). \tag{3}$$

$$h = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i + 1) \geq 0. \tag{4}$$

Para a g_n^r cortada por Σ_t, temos $r \geq h$

Sistemas lineares em curvas singulares

Seja $\mathcal{F}$ curva plana de grau d e gênero g. Sejam $P_1, \ldots, P_k$ singularidades de $\mathcal{F}$ com multipl. $r_1, \ldots, r_k$, resp.

$$g \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} r_i(r_i - 1). \tag{3}$$

$$h = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i + 1) \geq 0. \tag{4}$$

Para a g_n^r cortada por Σ_t, temos $r \geq h$

Sistemas lineares em curvas singulares

Para computar n, defina

$$t_i = \min\{I(P_i, \mathcal{F} \cap \mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \Sigma_t\}.$$

Pelo Teorema de Bézout,

$$n = td - \sum_{i=1}^{k} t_i. \tag{5}$$

Note que $t_i \geq s_i r_i$, e vale a desigualdade estrita se, e somente se, alguma reta tangente a $\mathcal{F}$ em P_i também é tangente a cada curva de Σ_t em P_i.

Sistemas lineares em curvas singulares

Para computar n, defina

$$t_i = \min\{I(P_i, \mathcal{F} \cap \mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \Sigma_t\}.$$

Pelo Teorema de Bézout,

$$n = td - \sum_{i=1}^{k} t_i. \tag{5}$$

Note que $t_i \geq s_i r_i$, e vale a desigualdade estrita se, e somente se, alguma reta tangente a $\mathcal{F}$ em P_i também é tangente a cada curva de Σ_t em P_i.

Sistemas lineares em curvas singulares

Assuma que g_n^r é simples, e que os pontos $P_1, \ldots, P_k$ estão em posição geral (com relação a t e $s_1, \ldots, s_k$).

$$r = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i+1).$$

Se cada P_i está definido sobre $\mathbb{F}_q$, então g_n^r está definida sobre $\mathbb{F}_q$. Seja $\Gamma \subset \mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ via g_n^r e Γ' o modelo de grau n' obtido via o sistema linear completo de curvas de grau t.

$r' = \frac{1}{2}t(t+3).$

Sistemas lineares em curvas singulares

Assuma que g_n^r é simples, e que os pontos $P_1, \ldots, P_k$ estão em posição geral (com relação a t e $s_1, \ldots, s_k$).

$$r = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i+1).$$

Se cada P_i está definido sobre $\mathbb{F}_q$, então g_n^r está definida sobre $\mathbb{F}_q$. Seja $\Gamma \subset \mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ via g_n^r e Γ' o modelo de grau n' obtido via o sistema linear completo de curvas de grau t. Daí $n' = td$ e $r' = \frac{1}{2}t(t+3)$.

Sistemas lineares em curvas singulares

Assuma que g_n^r é simples, e que os pontos $P_1, \ldots, P_k$ estão em posição geral (com relação a t e $s_1, \ldots, s_k$).

$$r = \frac{1}{2} t(t+3) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} s_i(s_i+1).$$

Se cada P_i está definido sobre $\mathbb{F}_q$, então g_n^r está definida sobre $\mathbb{F}_q$. Seja $\Gamma \subset \mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ via g_n^r e Γ' o modelo de grau n' obtido via o sistema linear completo de curvas de grau t. Daí $n' = td$ e $r' = \frac{1}{2} t(t+3)$.

Sistemas lineares em curvas singulares

Assuma que g_n^r é simples, e que os pontos $P_1, \ldots, P_k$ estão em posição geral (com relação a t e $s_1, \ldots, s_k$).

$$r = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i+1).$$

Se cada P_i está definido sobre $\mathbb{F}_q$, então g_n^r está definida sobre $\mathbb{F}_q$. Seja $\Gamma \subset \mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ via g_n^r e Γ' o modelo de grau n' obtido via o sistema linear completo de curvas de grau t. Daí $n' = td$ e $r' = \frac{1}{2}t(t+3)$.

Sistemas lineares em curvas singulares

Assuma que g_n^r é simples, e que os pontos $P_1, \ldots, P_k$ estão em posição geral (com relação a t e $s_1, \ldots, s_k$).

$$r = \frac{1}{2}t(t+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i+1).$$

Se cada P_i está definido sobre $\mathbb{F}_q$, então g_n^r está definida sobre $\mathbb{F}_q$. Seja $\Gamma \subset \mathbb{P}^r(\mathbb{K})$ via g_n^r e Γ' o modelo de grau n' obtido via o sistema linear completo de curvas de grau t. Daí $n' = td$ e $r' = \frac{1}{2}t(t+3)$.

Sistemas lineares em curvas singulares

Então

$$n' - n = \sum_{i=1}^{k} t_i \geq \sum_{i=1}^{k} r_i s_i \quad \text{e} \quad r' - r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} s_i(s_i + 1).$$

Curvas com duas singularidades

Seja $\mathcal{F}$ curva plana de grau d e gênero g def. sobre $\mathbb{F}_q$ satisfazendo a seguinte hipótese:

(H) $\mathcal{F}$ possui pelo menos duas singularidades O_1 e O_2 definidas sobre $\mathbb{F}_q$ com multiplicidades r_1 e r_2, resp., tais que $r_1 + r_2 = d$.

Fazendo $s_1 = s_2 = 1$, a série linear g_n^r cortada em $\mathcal{F}$ pelo sistema linear de cônicas passando por O_1 e O_2 é tal que $n = d$ e $r = 3$. Ademais, $g \leq r_1 r_2 - r_1 - r_2 + 1$.

Curvas com duas singularidades

Seja $\mathcal{F}$ curva plana de grau d e gênero g def. sobre $\mathbb{F}_q$ satisfazendo a seguinte hipótese:

(H) $\mathcal{F}$ possui pelo menos duas singularidades O_1 e O_2 definidas sobre $\mathbb{F}_q$ com multiplicidades r_1 e r_2, resp., tais que $r_1 + r_2 = d$.

Fazendo $s_1 = s_2 = 1$, a série linear g_n^r cortada em $\mathcal{F}$ pelo sistema linear de cônicas passando por O_1 e O_2 é tal que $n = d$ e $r = 3$. Ademais, $g \leq r_1 r_2 - r_1 - r_2 + 1$.

Curvas com duas singularidades

Denote por $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ o modelo de $\mathcal{F}$ obtido via g_d^3 e por $\mathcal{C}'$ o modelo obtido via g_{2d}^5.

$$N_m(\mathcal{C}) \leq 2r_1r_2 + \frac{(r_1+r_2)(q^m-3)}{3}, \tag{6}$$

$$N_m(\mathcal{F}) \leq r_1r_2 + \frac{(r_1+r_2)q^m}{2} \tag{7}$$

e

$$N_m(\mathcal{C}') \leq 4r_1r_2 + \frac{2(r_1+r_2)(q^m-5)}{5}. \tag{8}$$

Curvas com duas singularidades

Denote por $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ o modelo de $\mathcal{F}$ obtido via g_d^3 e por $\mathcal{C}'$ o modelo obtido via g_{2d}^5.

$$N_m(\mathcal{C}) \leq 2r_1r_2 + \frac{(r_1+r_2)(q^m-3)}{3}, \tag{6}$$

$$N_m(\mathcal{F}) \leq r_1r_2 + \frac{(r_1+r_2)q^m}{2} \tag{7}$$

e

$$N_m(\mathcal{C}') \leq 4r_1r_2 + \frac{2(r_1+r_2)(q^m-5)}{5}. \tag{8}$$

Curvas com duas singularidades

A cota (6) é melhor que as cotas (7) e (8) se

$$\frac{(15 - q^m)(r_1 + r_2)}{30} < r_1 r_2 < \frac{(q^m + 6)(r_1 + r_2)}{6}.$$

Curvas com duas singularidades

Seja $m = 2$ e $p > 2$.

$$N_2(\mathcal{C}) \leq \frac{2r_1r_2 + (r_1 + r_2)q(q+1) - (c_1 - c_2)N_1(\mathcal{C})}{c_2}, \qquad (9)$$

com $c_2 \geq 2$ e $c_1 \geq q + 4$. Em particular, a cota (9) melhora a cota (6) se

$$N_1(\mathcal{C}) > \frac{q(q+3)(r_1 + r_2) - 6(r_1r_2 - r_1 - r_2)}{3(q+2)}.$$

Curvas com duas singularidades

Se O_1 e O_2 estão definidos sobre K, podemos assumir que $O_1 = (1:0:0)$ e $O_2 = (0:1:0)$.

$$\mathcal{H} \cdot \mathcal{F} = \sum_{P \in \mathcal{X}} I(P', \mathcal{H} \cap \gamma_P)P.$$

Denote $\ell_1 : X = 0$, $\ell_2 : Y = 0$ e $\ell_\infty : Z = 0$. Então

$$div(x) = \ell_1 \cdot \mathcal{F} - \ell_\infty \cdot \mathcal{F} \quad \text{and} \quad div(y) = \ell_2 \cdot \mathcal{F} - \ell_\infty \cdot \mathcal{F}. \quad (10)$$

Curvas com duas singularidades

Se O_1 e O_2 estão definidos sobre K, podemos assumir que $O_1 = (1:0:0)$ e $O_2 = (0:1:0)$.

$$\mathcal{H} \cdot \mathcal{F} = \sum_{P \in \mathcal{X}} I(P', \mathcal{H} \cap \gamma_P) P.$$

Denote $\ell_1 : X = 0$, $\ell_2 : Y = 0$ e $\ell_\infty : Z = 0$. Então

$$div(x) = \ell_1 \cdot \mathcal{F} - \ell_\infty \cdot \mathcal{F} \quad \text{and} \quad div(y) = \ell_2 \cdot \mathcal{F} - \ell_\infty \cdot \mathcal{F}. \quad (10)$$

Curvas com duas singularidades

Se O_1 e O_2 estão definidos sobre K, podemos assumir que $O_1 = (1:0:0)$ e $O_2 = (0:1:0)$.

$$\mathcal{H} \cdot \mathcal{F} = \sum_{P \in \mathcal{X}} I(P', \mathcal{H} \cap \gamma_P) P.$$

Denote $\ell_1 : X = 0$, $\ell_2 : Y = 0$ e $\ell_\infty : Z = 0$. Então

$$div(x) = \ell_1 \cdot \mathcal{F} - \ell_\infty \cdot \mathcal{F} \quad \text{and} \quad div(y) = \ell_2 \cdot \mathcal{F} - \ell_\infty \cdot \mathcal{F}. \tag{10}$$

Curvas com duas singularidades

Lemma

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ *uma curva irredutível de grau* d *definida sobre* K*. Sejam* $x, y \in K(\mathcal{F})$ *tais que* $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ *e* $f(x, y) = 0$*. Assuma que* x *e* y *não possuem pólos em comum. Então:*

(i) $\ell_\infty \cap \mathcal{F} = \{O_1, O_2\}$.

(ii) *P é pólo de x se, e somente se, P está centrado em O_1, e Q é pólo de y se, e somente se, Q está centrado em O_2.*

(iii) *$I(O_1, \ell_2 \cap \gamma_P) \geq I(O_1, \ell_\infty \cap \gamma_P)$ para todo ramo γ_P de $\mathcal{F}$ centrado em O_1.*

(iv) *$I(O_2, \ell_1 \cap \gamma_Q) \geq I(O_2, \ell_\infty \cap \gamma_Q)$ para todo ramo γ_Q de $\mathcal{F}$ centrado em O_2.*

Curvas com duas singularidades

Lemma

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ *uma curva irredutível de grau* d *definida sobre* K. *Sejam* $x, y \in K(\mathcal{F})$ *tais que* $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ *e* $f(x, y) = 0$. *Assuma que* x *e* y *não possuem pólos em comum. Então:*

(i) $\ell_\infty \cap \mathcal{F} = \{O_1, O_2\}$.

(ii) P *é pólo de* x *se, e somente se,* P *está centrado em* O_1, *e* Q *é pólo de* y *se, e somente se,* Q *está centrado em* O_2.

(iii) $I(O_1, \ell_2 \cap \gamma_P) \geq I(O_1, \ell_\infty \cap \gamma_P)$ *para todo ramo* γ_P *de* $\mathcal{F}$ *centrado em* O_1.

(iv) $I(O_2, \ell_1 \cap \gamma_Q) \geq I(O_2, \ell_\infty \cap \gamma_Q)$ *para todo ramo* γ_Q *de* $\mathcal{F}$ *centrado em* O_2.

Curvas com duas singularidades

Lemma

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ uma curva irredutível de grau d definida sobre K. Sejam $x, y \in K(\mathcal{F})$ tais que $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ e $f(x, y) = 0$. Assuma que x e y não possuem pólos em comum. Então:

(i) $\ell_\infty \cap \mathcal{F} = \{O_1, O_2\}$.

(ii) *P é pólo de x se, e somente se, P está centrado em O_1, e Q é pólo de y se, e somente se, Q está centrado em O_2.*

(iii) *$I(O_1, \ell_2 \cap \gamma_P) \geq I(O_1, \ell_\infty \cap \gamma_P)$ para todo ramo γ_P de $\mathcal{F}$ centrado em O_1.*

(iv) *$I(O_2, \ell_1 \cap \gamma_Q) \geq I(O_2, \ell_\infty \cap \gamma_Q)$ para todo ramo γ_Q de $\mathcal{F}$ centrado em O_2.*

Curvas com duas singularidades

Lemma

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ uma curva irredutível de grau d definida sobre K. Sejam $x, y \in K(\mathcal{F})$ tais que $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ e $f(x, y) = 0$. Assuma que x e y não possuem pólos em comum. Então:

(i) $\ell_\infty \cap \mathcal{F} = \{O_1, O_2\}$.

(ii) *P é pólo de x se, e somente se, P está centrado em O_1, e Q é pólo de y se, e somente se, Q está centrado em O_2.*

(iii) *$I(O_1, \ell_2 \cap \gamma_P) \geq I(O_1, \ell_\infty \cap \gamma_P)$ para todo ramo γ_P de $\mathcal{F}$ centrado em O_1.*

(iv) *$I(O_2, \ell_1 \cap \gamma_Q) \geq I(O_2, \ell_\infty \cap \gamma_Q)$ para todo ramo γ_Q de $\mathcal{F}$ centrado em O_2.*

Curvas com duas singularidades

Lemma

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ uma curva irredutível de grau d definida sobre K. Sejam $x, y \in K(\mathcal{F})$ tais que $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ e $f(x, y) = 0$. Assuma que x e y não possuem pólos em comum. Então:

(i) $\ell_\infty \cap \mathcal{F} = \{O_1, O_2\}$.

(ii) *P é pólo de x se, e somente se, P está centrado em O_1, e Q é pólo de y se, e somente se, Q está centrado em O_2.*

(iii) *$I(O_1, \ell_2 \cap \gamma_P) \geq I(O_1, \ell_\infty \cap \gamma_P)$ para todo ramo γ_P de $\mathcal{F}$ centrado em O_1.*

(iv) *$I(O_2, \ell_1 \cap \gamma_Q) \geq I(O_2, \ell_\infty \cap \gamma_Q)$ para todo ramo γ_Q de $\mathcal{F}$ centrado em O_2.*

Curvas com duas singularidades

Theorem

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ curva plana irredutível de grau d definida sobre K. Sejam $x, y \in K(\mathcal{F})$ tais que $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ e $f(x, y) = 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *As funções x e y não possuem pólos em comum.*

(b) *$f(X, Y) = X^m Y^l + g(X, Y)$, onde $g(X, Y)$ possui grau $n < d = m + l$, tal que o grau de $g(T, Y) \in K[Y][T]$ é $\leq m$ e o grau de $g(X, T) \in K[X][T]$ é $\leq l$.*

(c) *O_1 e O_2 possuem respectivas multiplicidades l e m em $\mathcal{F}$ tais que $m + l = d$.*

Curvas com duas singularidades

Theorem

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ *curva plana irredutível de grau d definida sobre* K. *Sejam* $x, y \in K(\mathcal{F})$ *tais que* $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ *e* $f(x, y) = 0$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *As funções* x *e* y *não possuem pólos em comum.*

(b) $f(X, Y) = X^m Y^l + g(X, Y)$, *onde* $g(X, Y)$ *possui grau* $n < d = m + l$, *tal que o grau de* $g(T, Y) \in K[Y][T]$ *é* $\leq m$ *e o grau de* $g(X, T) \in K[X][T]$ *é* $\leq l$.

(c) O_1 *e* O_2 *possuem respectivas multiplicidades* l *e* m *em* $\mathcal{F}$ *tais que* $m + l = d$.

Curvas com duas singularidades

Theorem

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ curva plana irredutível de grau d definida sobre K. Sejam $x, y \in K(\mathcal{F})$ tais que $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ e $f(x, y) = 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *As funções x e y não possuem pólos em comum.*

(b) *$f(X, Y) = X^m Y^l + g(X, Y)$, onde $g(X, Y)$ possui grau $n < d = m + l$, tal que o grau de $g(T, Y) \in K[Y][T]$ é $\leq m$ e o grau de $g(X, T) \in K[X][T]$ é $\leq l$.*

(c) *O_1 e O_2 possuem respectivas multiplicidades l e m em $\mathcal{F}$ tais que $m + l = d$.*

Curvas com duas singularidades

Theorem

Seja $\mathcal{F} : f(X, Y) = 0$ curva plana irredutível de grau d definida sobre K. Sejam $x, y \in K(\mathcal{F})$ tais que $K(\mathcal{F}) = K(x, y)$ e $f(x, y) = 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *As funções x e y não possuem pólos em comum.*

(b) *$f(X, Y) = X^m Y^l + g(X, Y)$, onde $g(X, Y)$ possui grau $n < d = m + l$, tal que o grau de $g(T, Y) \in K[Y][T]$ é $\leq m$ e o grau de $g(X, T) \in K[X][T]$ é $\leq l$.*

(c) *O_1 e O_2 possuem respectivas multiplicidades l e m em $\mathcal{F}$ tais que $m + l = d$.*

Uma curva atingindo a cota

Considere a curva de Artin-Mumford generalizada

$$\mathcal{M} : (X^q - X)(Y^q - Y) = 1 \tag{11}$$

definida sobre $\mathbb{F}_q$ de característica $p > 3$.

- As únicas sing. de $\mathcal{M}$ são O_1 e O_2, ambas ordinárias de mult. q.
- $g = qq - q - q + 1 = (q-1)^2$.
- As tangentes a $\mathcal{M}$ em O_1 (O_2) são $y = a$ ($x = a$), com $a \in \mathbb{F}_q$.

Uma curva atingindo a cota

Considere a curva de Artin-Mumford generalizada

$$\mathcal{M} : (X^q - X)(Y^q - Y) = 1 \tag{11}$$

definida sobre $\mathbb{F}_q$ de característica $p > 3$.

- As únicas sing. de $\mathcal{M}$ são O_1 e O_2, ambas ordinárias de mult. q.
- $g = qq - q - q + 1 = (q-1)^2$.
- As tangentes a $\mathcal{M}$ em O_1 (O_2) são $y = a$ ($x = a$), com $a \in \mathbb{F}_q$.

Uma curva atingindo a cota

Seja $\mathcal{X}$ modelo não singular de $\mathcal{M}$. O sistema linear Σ de cônicas passando por O_1 e O_2 nos fornece o modelo $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{C}$, onde

$$\varphi = (1 : x : y : xy) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{K}).$$

Assim

$$c_1 N_1(\mathcal{M}) + c_2(N_2(\mathcal{M}) - N_1(\mathcal{M})) \leq (\kappa_0 + \kappa_1)(2g-2) + 2q(q^2+q+2),$$

Uma curva atingindo a cota

Seja $\mathcal{X}$ modelo não singular de $\mathcal{M}$. O sistema linear Σ de cônicas passando por O_1 e O_2 nos fornece o modelo $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{C}$, onde

$$\varphi = (1 : x : y : xy) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{K}).$$

Assim

$$c_1 N_1(\mathcal{M}) + c_2(N_2(\mathcal{M}) - N_1(\mathcal{M})) \leq (\kappa_0 + \kappa_1)(2g - 2) + 2q(q^2 + q + 2),$$

Uma curva atingindo a cota

Proposition

$N_1(\mathcal{M}) = 2q$ e $N_2(\mathcal{M}) = q^2(q-1) + 2q$.

Lemma

Seja $P = (a : b : 1) \in \mathcal{M}$. A cônica osculadora a $\mathcal{M}$ em P é o fecho projetivo $\mathcal{H}_P$ da cônica irredutível definida por $g_P(X, Y) = 0$, onde

$$g_P(X, Y) = (ab - 1)^q - a^q Y - b^q X + XY. \qquad (12)$$

Em particular, $\mathcal{H}_P \in \Sigma$ para todo $P = (a : b : 1) \in \mathcal{M}$. Além disso, $I(P, \mathcal{M} \cap \mathcal{H}_P) \geq q$ para todo tal P.

Uma curva atingindo a cota

Proposition

$N_1(\mathcal{M}) = 2q$ e $N_2(\mathcal{M}) = q^2(q-1) + 2q$.

Lemma

Seja $P = (a : b : 1) \in \mathcal{M}$. A cônica osculadora a $\mathcal{M}$ em P é o fecho projetivo $\mathcal{H}_P$ da cônica irredutível definida por $g_P(X,Y) = 0$, onde

$$g_P(X,Y) = (ab-1)^q - a^qY - b^qX + XY. \qquad (12)$$

Em particular, $\mathcal{H}_P \in \Sigma$ para todo $P = (a : b : 1) \in \mathcal{M}$. Além disso, $I(P, \mathcal{M} \cap \mathcal{H}_P) \geq q$ para todo tal P.

Uma curva atingindo a cota

Lemma

A curva $\mathcal{C}$ é não clássica com sequência de ordens $(0, 1, 2, q)$.

Lemma

A (Σ, P)-sequência de ordens é $(0, 1, q, q+1)$ para todo $P \in \mathcal{M}(\mathbb{F}_q)$.

Proposition

Seja r um inteiro positivo. A curva $\mathcal{C}$ é $\mathbb{F}_{q^r}$-Frobenius não clássica se, e somente se, $r = 2$.

Uma curva atingindo a cota

Lemma

A curva $\mathcal{C}$ é não clássica com sequência de ordens $(0, 1, 2, q)$.

Lemma

A (Σ, P)-sequência de ordens é $(0, 1, q, q+1)$ para todo $P \in \mathcal{M}(\mathbb{F}_q)$.

Proposition

Seja r um inteiro positivo. A curva $\mathcal{C}$ é $\mathbb{F}_{q^r}$-Frobenius não clássica se, e somente se, $r = 2$.

Uma curva atingindo a cota

Lemma

A curva $\mathcal{C}$ é não clássica com sequência de ordens $(0, 1, 2, q)$.

Lemma

A (Σ, P)-sequência de ordens é $(0, 1, q, q + 1)$ para todo $P \in \mathcal{M}(\mathbb{F}_q)$.

Proposition

Seja r um inteiro positivo. A curva $\mathcal{C}$ é $\mathbb{F}_{q^r}$-Frobenius não clássica se, e somente se, $r = 2$.

Uma curva atingindo a cota

Corollary

A curva $\mathcal{C}$ é (q^u, q^m)-Frobenius clássica para todos $u, m > 0$ tais que $u \neq m$ e $\gcd(u, m) = 1$.

Fim

Obrigado!