Limpeza em anéis e álgebras de grupos

Paula Murgel Veloso

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Análise, Niterói – RJ

27 de outubro de 2014

Algumas definições

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*:

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*:
$\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$;

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*: $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*:
   $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
2. *elemento idempotente*:

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*: $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\, ;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
2. *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$.

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*:
$\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
2. *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$.
$e, f \in A$ são *idempotentes ortogonais* se são ambos idempotentes e $ef = 0$.

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*:
   $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
2. *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$.
   $e, f \in A$ são *idempotentes ortogonais* se são ambos idempotentes e $ef = 0$.
3. *elemento nilpotente*:

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*: $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\ \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
2. *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$. $e, f \in A$ são *idempotentes ortogonais* se são ambos idempotentes e $ef = 0$.
3. *elemento nilpotente*: $x \in A$ tal que $x^n = 0$ para algum $n \geq 1$.

Algumas definições

A anel (associativo com 1).

1. *grupo de unidades de A*: $\mathcal{U}(A) = \{a \in A\,;\, \exists\, b \in A, ab = 1 = ba\}$; u é uma *unidade* em A se $u \in \mathcal{U}(A)$.
2. *elemento idempotente*: $e \in A$ tal que $e^2 = e$. $e, f \in A$ são *idempotentes ortogonais* se são ambos idempotentes e $ef = 0$.
3. *elemento nilpotente*: $x \in A$ tal que $x^n = 0$ para algum $n \geq 1$.
4. *radical de Jacobson de A*: $\mathcal{J}(A) = \bigcap_{M \text{ ideal maximal à esquerda de } A} M$.

Elementos limpos

Elementos limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$,

Elementos limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

Elementos limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

Exemplos

- **Unidades:** $u = u + 0$;

Elementos limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

Exemplos

- **Unidades:** $u = u + 0$;
- **Elementos idempotentes:** $e = (2e - 1) + (1 - e)$;

Elementos limpos

$a \in A$ é um *elemento limpo* se pode ser escrito na forma $a = u + e$, com $u \in \mathcal{U}(A)$ e $e \in A$ idempotente.

Exemplos

- **Unidades:** $u = u + 0$;
- **Elementos idempotentes:** $e = (2e - 1) + (1 - e)$;
- **Elementos nilpotentes:** $x = (x - 1) + 1$.

Anéis limpos

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos.

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Proposition 13])

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Proposition 13])
- A limpo $\implies$ $M_n(A)$ limpo.

Anéis limpos

A é um *anel limpo* se todo elemento $a \in A$ é limpo.

Exemplos e propriedades

- Todo corpo é limpo.
- Todo anel Booleano é limpo.
  [Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.]
- $\mathbb{Z}$ não é limpo.
- Anéis de polinômios não são limpos. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Proposition 13])
- A limpo $\implies$ $M_n(A)$ limpo. (Han & Nicholson, 2001 [4, Corollary 1])

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo.

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Example 3])

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo.

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\Longleftrightarrow$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Theorem 22])

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\Longleftrightarrow$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Theorem 22])
- Subanéis de anéis limpos podem não ser limpos

Anéis limpos (cont.)

Exemplos e propriedades (cont.)

- $\Pi_i A_i$ limpo $\iff$ cada A_i limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Example 3])
- Toda imagem homomórfica de um anel limpo é um anel limpo. (Nicholson & Zhou, 2004 [6, Theorem 22])
- Subanéis de anéis limpos podem não ser limpos (e.g., $\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathbb{Q}$).

Breve histórico

Breve histórico

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [5] enquanto estudava *anéis 'exchange'* (= anéis 'suitable' – apropriado, adequado, conveniente)

Breve histórico

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [5] enquanto estudava *anéis 'exchange'* (= anéis 'suitable' – apropriado, adequado, conveniente) no contexto da teoria abstrata de anéis.

Breve histórico

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [5] enquanto estudava *anéis 'exchange'* (= anéis 'suitable' – apropriado, adequado, conveniente) no contexto da teoria abstrata de anéis.

O nome vem da expressão *"suitable for building idempotents"* – adequado para construir idempotentes.

Breve histórico

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [5] enquanto estudava *anéis 'exchange'* (= anéis 'suitable' – apropriado, adequado, conveniente) no contexto da teoria abstrata de anéis.

O nome vem da expressão *"suitable for building idempotents"* – adequado para construir idempotentes. (Jacobson, 1964 [3]).

Breve histórico

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [5] enquanto estudava *anéis 'exchange'* (= anéis 'suitable' – apropriado, adequado, conveniente) no contexto da teoria abstrata de anéis.

O nome vem da expressãon *"suitable for building idempotents"* – adequado para construir idempotentes. (Jacobson, 1964 [3]).

Um anel é *suitable* $\Longleftrightarrow$ seus idempotentes se levantam módulo todo ideal à esquerda.

Breve histórico

Nicholson definiu anéis limpos em 1977 [5] enquanto estudava *anéis 'exchange'* (= anéis 'suitable' – apropriado, adequado, conveniente) no contexto da teoria abstrata de anéis.

O nome vem da expressãon *"suitable for building idempotents"* – adequado para construir idempotentes. (Jacobson, 1964 [3]).

Um anel é *suitable* $\iff$ seus idempotentes se levantam módulo todo ideal à esquerda.

Se L é um subgrupo aditivo de um anel A, *seus idempotentes se levantam módulo* L se, dado $x \in A$ com $x - x^2 \in L$, existe $e^2 = e \in A$ tal que $e - x \in L$.

“Localizando” os anéis limpos

“Localizando” os anéis limpos

Diversos autores tem estudado anéis limpos:

“Localizando” os anéis limpos

Diversos autores tem estudado anéis limpos: Nicholson [6, 5, 2], Zhou [6, 2], Camillo [1], Yu [1], Wang [9], You [9], Chen [2] etc.

“Localizando” os anéis limpos

Diversos autores tem estudado anéis limpos: Nicholson [6, 5, 2], Zhou [6, 2], Camillo [1], Yu [1], Wang [9], You [9], Chen [2] etc.

Os anéis limpos foram apresentados como uma subclasse dos anéis suitable

“Localizando” os anéis limpos

Diversos autores tem estudado anéis limpos: Nicholson [6, 5, 2], Zhou [6, 2], Camillo [1], Yu [1], Wang [9], You [9], Chen [2] etc.

Os anéis limpos foram apresentados como uma subclasse dos anéis suitable (“cota superior”).

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

A é um *anel semilocal* se $A/\mathcal{J}(A)$ é um anel semissimples.

“Localizando” os anéis limpos (cont.)

A é um *anel semilocal* se $A/\mathcal{J}(A)$ é um anel semissimples.

A classe dos anéis semilocais é muito grande;

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

A é um *anel semilocal* se $A/\mathcal{J}(A)$ é um anel semissimples.
A classe dos anéis semilocais é muito grande; anéis semiperfeitos são uma de suas subclasses.

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

A é um *anel semilocal* se $A/\mathcal{J}(A)$ é um anel semissimples.
A classe dos anéis semilocais é muito grande; anéis semiperfeitos são uma de suas subclasses.

A é um *anel semiperfeito* se ele é semilocal e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

“Localizando” os anéis limpos (cont.)

A é um *anel semilocal* se $A/\mathcal{J}(A)$ é um anel semissimples.
A classe dos anéis semilocais é muito grande; anéis semiperfeitos são uma de suas subclasses.

A é um *anel semiperfeito* se ele é semilocal e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Teorema (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 9])

Um anel é semiperfeito $\iff$ ele é limpo e não possui nenhum conjunto infinito de idempotentes ortogonais.

“Localizando” os anéis limpos (cont.)

A é um *anel semilocal* se $A/\mathcal{J}(A)$ é um anel semissimples.
A classe dos anéis semilocais é muito grande; anéis semiperfeitos são uma de suas subclasses.

A é um *anel semiperfeito* se ele é semilocal e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Teorema (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 9])

Um anel é semiperfeito $\iff$ ele é limpo e não possui nenhum conjunto infinito de idempotentes ortogonais.

(“cota inferior”)

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff$ $A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples:

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo;

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K)

“Localizando” os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K) $\implies A$ é limpo,

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K) $\implies A$ é limpo, $\mathcal{J}(A) = \{0\}$ (tudo se levanta módulo $\mathcal{J}(A)$)

“Localizando” os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K) $\implies$ A é limpo, $\mathcal{J}(A) = \{0\}$ (tudo se levanta módulo $\mathcal{J}(A)$) e $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é Artiniano

“Localizando” os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff$ $A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K) $\implies$ A é limpo, $\mathcal{J}(A) = \{0\}$ (tudo se levanta módulo $\mathcal{J}(A)$) e $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é Artiniano $\implies$ $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é semissimples

“Localizando” os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K) $\implies$ A é limpo, $\mathcal{J}(A) = \{0\}$ (tudo se levanta módulo $\mathcal{J}(A)$) e $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é Artiniano $\implies$ $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é semissimples $\implies$ A não é semiperfeito.

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K) $\implies$ A é limpo, $\mathcal{J}(A) = \{0\}$ (tudo se levanta módulo $\mathcal{J}(A)$) e $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é Artiniano $\implies$ $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é semissimples $\implies$ A não é semiperfeito.

Na ausência de conjuntos infinitos de idempotentes ortogonais, as noções de anéis suitable, limpos e semiperfeitos coincidem

"Localizando" os anéis limpos (cont.)

Proposição (Camillo & Yu, 1994 [1, Theorem 7])

Um anel A é limpo $\iff A/\mathcal{J}(A)$ é limpo e seus idempotentes se levantam módulo $\mathcal{J}(A)$.

Um anel limpo A que não seja semiperfeito deve ter $A/\mathcal{J}(A)$ não semissimples: seja K um corpo; considere $A = \Pi K$ (infinitas – enumeráveis – cópias de K) $\implies A$ é limpo, $\mathcal{J}(A) = \{0\}$ (tudo se levanta módulo $\mathcal{J}(A)$) e $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é Artiniano $\implies$ $A = A/\mathcal{J}(A)$ não é semissimples $\implies$ A não é semiperfeito.

Na ausência de conjuntos infinitos de idempotentes ortogonais, as noções de anéis suitable, limpos e semiperfeitos coincidem (Camillo & Yu, 1994 [1, Corollary 12]).

Definição

Definição

R um anel;

Definição

R um anel; G um grupo;

Definição

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*:

Definição

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de* G *sobre* R: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

Definição

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

Se R é um anel comutativo, RG é a *álgebra de grupo de G sobre R*.

Para $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in RG$, defina o *suporte* de α como:

Definição

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

Se R é um anel comutativo, RG é a *álgebra de grupo de G sobre R*.

Para $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in RG$, defina o *suporte* de α como:
$\operatorname{supp}(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$

Definição

R um anel; G um grupo;
RG, o *anel de grupo de G sobre R*: o R-módulo livre com base G munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G.

Se R é um anel comutativo, RG é a *álgebra de grupo de G sobre R*.

Para $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in RG$, defina o *suporte* de α como: $\mathrm{supp}(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ ($\mathrm{supp}(\alpha)$ é um conjunto finito).

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
   $RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
$RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$
$\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ (soma finita, escrita única) , $\alpha_g \in R$

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
   $RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$
   $\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ (soma finita, escrita única) , $\alpha_g \in R$

   operações:

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
   $RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$
   $\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ (soma finita, escrita única) $, \alpha_g \in R$

   operações:
   $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g \in RG, r \in R$

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
   $RG = \oplus_{g \in G} Rg$
   $\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ (soma finita, escrita única) $, \alpha_g \in R$

   operações:
   $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g \in RG, r \in R$
   $\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g \in RG$

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
   $RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$
   $\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ (soma finita, escrita única) $, \alpha_g \in R$

   operações:
   $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g,\ \beta = \sum_{g \in G} \beta_g g \in RG, r \in R$
   $\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g \in RG$
   $r\alpha = \sum_{g \in G} (r\alpha_g) g \in RG$

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
   $RG = \oplus_{g \in G} Rg$
   $\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ (soma finita, escrita única) , $\alpha_g \in R$

   operações:
   $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g \in RG, r \in R$
   $\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g \in RG$
   $r\alpha = \sum_{g \in G} (r\alpha_g) g \in RG$
2. munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G

Definição (cont.)

1. R-módulo livre com base G
   $RG = \bigoplus_{g\in G} Rg$
   $\alpha \in RG$; $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g$ (soma finita, escrita única) $, \alpha_g \in R$

   operações:
   $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g,\ \beta = \sum_{g\in G} \beta_g g \in RG, r \in R$
   $\alpha + \beta = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g \in RG$
   $r\alpha = \sum_{g\in G} (r\alpha_g) g \in RG$
2. munido de multiplicação definida estendendo-se R-linearmente a multiplicação de G
   $\alpha \cdot \beta = (\sum_{g\in G} \alpha_g g)(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh \in RG$

Problemas de anéis

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local? semilocal?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local? semilocal? perfeito?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local? semilocal? perfeito? semiperfeito?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local? semilocal? perfeito? semiperfeito? limpo?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local? semilocal? perfeito? semiperfeito? limpo? unicamente limpo?

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local? semilocal? perfeito? semiperfeito? limpo? unicamente limpo? ...

Problemas de anéis

O anel de grupo RG é um **anel**.
Perguntas que fazemos sobre anéis.

Quais são os ideais de RG?
Qual é o centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG?
Sob que condições em R e em G, RG é um anel comutativo? semissimples? primo? primitivo? local? semilocal? perfeito? semiperfeito? limpo? unicamente limpo? ... (qualquer propriedade de um anel)

Problemas de anéis de grupos

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H, $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H, $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?
2. **O grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG:**

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H,
   $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?
2. **O grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG:**
   Problema: Descrever o grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG.

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H, $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?

2. **O grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG:**
   Problema: Descrever o grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG.

   Hartley e Pickel (1980):

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H, $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?

2. **O grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG:**
   Problema: Descrever o grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG.

   Hartley e Pickel (1980): $\exists$ pares livres em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ (G não abeliano, nem um 2-grupo Hamiltoniano).

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H, $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?
2. **O grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG:**
   Problema: Descrever o grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG.

   Hartley e Pickel (1980): $\exists$ pares livres em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ (G não abeliano, nem um 2-grupo Hamiltoniano).
   par livre:

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H, $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?
2. **O grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG:**
   Problema: Descrever o grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG.

   Hartley e Pickel (1980): $\exists$ pares livres em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ (G não abeliano, nem um 2-grupo Hamiltoniano).
   par livre: $u, v \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ tais que $\langle u, v \rangle$ é um subgrupo livre de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.

Problemas de anéis de grupos

1. **Problema do Isomorfismo:**
   Pergunta: $RG \simeq RH \implies G \simeq H$? Em geral, não.

   Pergunta': Sob que condições em R, em G e em H, $RG \simeq RH \implies G \simeq H$?

2. **O grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG:**
   Problema: Descrever o grupo de unidades $\mathcal{U}(RG)$ de RG.

   Hartley e Pickel (1980): $\exists$ pares livres em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ (G não abeliano, nem um 2-grupo Hamiltoniano).
   par livre: $u, v \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ tais que $\langle u, v \rangle$ é um subgrupo livre de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.

   Problema': Encontrar pares livres em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.

Um pouco de história

Um pouco de história

Queremos determinar condições no anel R e no grupo G para que o anel de grupo RG seja um anel limpo.

Um pouco de história

Queremos determinar condições no anel R e no grupo G para que o anel de grupo RG seja um anel limpo.

- Han e Nicholson foram os primeiros a abordar a propriedade de limpeza em anéis de grupos em 2001. [4]

Um pouco de história

Queremos determinar condições no anel R e no grupo G para que o anel de grupo RG seja um anel limpo.

- Han e Nicholson foram os primeiros a abordar a propriedade de limpeza em anéis de grupos em 2001. [4]
- Em 2012, Wang e You analisaram a limpeza de anéis de grupos de p-grupos sobre anéis comutativos. [9]

Um pouco de história

Queremos determinar condições no anel R e no grupo G para que o anel de grupo RG seja um anel limpo.

- Han e Nicholson foram os primeiros a abordar a propriedade de limpeza em anéis de grupos em 2001. [4]
- Em 2012, Wang e You analisaram a limpeza de anéis de grupos de p-grupos sobre anéis comutativos. [9]
  Se $p \in \mathcal{J}(R)$, então RG é um anel limpo $\iff$ R é um anel limpo.

Um pouco de história

Queremos determinar condições no anel R e no grupo G para que o anel de grupo RG seja um anel limpo.

- Han e Nicholson foram os primeiros a abordar a propriedade de limpeza em anéis de grupos em 2001. [4]
- Em 2012, Wang e You analisaram a limpeza de anéis de grupos de p-grupos sobre anéis comutativos. [9]
  Se $p \in \mathcal{J}(R)$, então RG é um anel limpo $\Longleftrightarrow$ R é um anel limpo.

Nosso objetivo

Determinar condições no corpo K e no grupo G para que a álgebra de grupo KG seja um anel limpo.

Grupos finitos

Grupos finitos

Teorema

Se G é um grupo finito, então KG é um anel limpo.

Grupos finitos

Teorema

Se G é um grupo finito, então KG é um anel limpo.

KG é uma álgebra de dimensão finita sobre K

Grupos finitos

Teorema

Se G é um grupo finito, então KG é um anel limpo.

KG é uma álgebra de dimensão finita sobre $K \implies KG$ é um anel Artiniano

Grupos finitos

Teorema

Se G é um grupo finito, então KG é um anel limpo.

KG é uma álgebra de dimensão finita sobre $K \implies KG$ é um anel Artiniano $\implies KG$ é um anel semiperfeito e não possui nenhum conjunto infinito de idempotentes ortogonais

Grupos finitos

Teorema

Se G é um grupo finito, então KG é um anel limpo.

KG é uma álgebra de dimensão finita sobre $K \implies KG$ é um anel Artiniano $\implies KG$ é um anel semiperfeito e não possui nenhum conjunto infinito de idempotentes ortogonais $\implies KG$ é um anel limpo.

Grupos localmente finitos

Grupos localmente finitos

[Um grupo é *grupo localmente finito* se todo subgrupo finitamente gerado é finito.]

Grupos localmente finitos

[Um grupo é *grupo localmente finito* se todo subgrupo finitamente gerado é finito.]

Corolário

Se G é um **grupo localmente finito**, então KG é um anel limpo.

Grupos localmente finitos

[Um grupo é *grupo localmente finito* se todo subgrupo finitamente gerado é finito.]

Corolário

Se G é um **grupo localmente finito**, então KG é um anel limpo.

Tome $\alpha \in KG$; $\operatorname{supp}(\alpha)$ é um conjunto finito.

Grupos localmente finitos

[Um grupo é *grupo localmente finito* se todo subgrupo finitamente gerado é finito.]

Corolário

Se G é um **grupo localmente finito**, então KG é um anel limpo.

Tome $\alpha \in KG$; $\mathrm{supp}(\alpha)$ é um conjunto finito.

Defina $H = \langle \mathrm{supp}(\alpha) \rangle$,

Grupos localmente finitos

[Um grupo é *grupo localmente finito* se todo subgrupo finitamente gerado é finito.]

Corolário

Se G é um **grupo localmente finito**, então KG é um anel limpo.

Tome $\alpha \in KG$; $\operatorname{supp}(\alpha)$ é um conjunto finito.

Defina $H = \langle \operatorname{supp}(\alpha) \rangle$, que é um grupo finito, e $\alpha \in KH$.

Grupos localmente finitos

[Um grupo é *grupo localmente finito* se todo subgrupo finitamente gerado é finito.]

Corolário

Se G é um **grupo localmente finito**, então KG é um anel limpo.

Tome $\alpha \in KG$; $\text{supp}(\alpha)$ é um conjunto finito.

Defina $H = \langle \text{supp}(\alpha) \rangle$, que é um grupo finito, e $\alpha \in KH$. Assim, KH é um anel limpo e α é um elemento limpo.

Grupos localmente finitos

[Um grupo é *grupo localmente finito* se todo subgrupo finitamente gerado é finito.]

Corolário

Se G é um **grupo localmente finito**, então KG é um anel limpo.

Tome $\alpha \in KG$; $\text{supp}(\alpha)$ é um conjunto finito.

Defina $H = \langle \text{supp}(\alpha) \rangle$, que é um grupo finito, e $\alpha \in KH$. Assim, KH é um anel limpo e α é um elemento limpo.

Assim, KG é limpo.

KC_∞ não é um anel limpo

KC_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$C_\infty = \langle x \rangle$

KC_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$C_\infty = \langle x \rangle$

- **Unidades:** ax^n, com $a \in K \setminus \{0\}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).

KC_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$C_\infty = \langle x \rangle$

- **Unidades:** ax^n, com $a \in K \setminus \{0\}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
- **Idempotentes:** $0, 1$ (idempotentes triviais).

KC_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$C_\infty = \langle x \rangle$

- **Unidades:** ax^n, com $a \in K \setminus \{0\}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
- **Idempotentes:** $0, 1$ (idempotentes triviais).

Teorema

Se $G \simeq H \rtimes C_\infty$, então KG não é um anel limpo.

KC_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$C_\infty = \langle x \rangle$

- **Unidades:** ax^n, com $a \in K \setminus \{0\}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
- **Idempotentes:** $0, 1$ (idempotentes triviais).

Teorema

Se $G \simeq H \rtimes C_\infty$, então KG não é um anel limpo.

Temos que $G/H \simeq C_\infty$;

KC_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$C_\infty = \langle x \rangle$

- **Unidades:** ax^n, com $a \in K \setminus \{0\}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
- **Idempotentes:** $0, 1$ (idempotentes triviais).

Teorema

Se $G \simeq H \rtimes C_\infty$, então KG não é um anel limpo.

Temos que $G/H \simeq C_\infty$; portanto $K(G/H) \simeq KC_\infty$ não é limpo.

KC_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$C_\infty = \langle x \rangle$

- **Unidades:** ax^n, com $a \in K \setminus \{0\}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
- **Idempotentes:** $0, 1$ (idempotentes triviais).

Teorema

Se $G \simeq H \rtimes C_\infty$, então KG não é um anel limpo.

Temos que $G/H \simeq C_\infty$; portanto $K(G/H) \simeq KC_\infty$ não é limpo. Assim, KG não é limpo.

KD_∞ não é um anel limpo

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle$

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle \simeq \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$$

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle \simeq \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$$

$d \in KD_\infty$,

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle \simeq \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$

$d \in KD_\infty$, $d = \alpha + \beta y$, $\alpha, \beta \in K\langle x \rangle \simeq KC_\infty$

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle \simeq \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$

$d \in KD_\infty$, $d = \alpha + \beta y$, $\alpha, \beta \in K\langle x \rangle \simeq KC_\infty$

Para $\alpha = \sum a_n x^n \in K\langle x \rangle$, defina $\alpha^* = \sum a_n x^{-n}$.

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle \simeq \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$

$d \in KD_\infty$, $d = \alpha + \beta y$, $\alpha, \beta \in K\langle x \rangle \simeq KC_\infty$

Para $\alpha = \sum a_n x^n \in K\langle x \rangle$, defina $\alpha^* = \sum a_n x^{-n}$.

Produto em KD_∞:
$(\alpha_1 + \beta_1 y)(\alpha_2 + \beta_2 y) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2^*) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2^*)y$

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle \simeq \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$

$d \in KD_\infty$, $d = \alpha + \beta y$, $\alpha, \beta \in K\langle x \rangle \simeq KC_\infty$

Para $\alpha = \sum a_n x^n \in K\langle x \rangle$, defina $\alpha^* = \sum a_n x^{-n}$.

Produto em KD_∞:
$(\alpha_1 + \beta_1 y)(\alpha_2 + \beta_2 y) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2^*) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2^*)y$

Podemos fazer a injeção: $KD_\infty \longrightarrow M_2(K\langle x \rangle)$,
$\alpha + \beta y \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y\rangle \simeq \langle x\rangle \rtimes \langle y\rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$

$d \in KD_\infty$, $d = \alpha + \beta y$, $\alpha, \beta \in K\langle x\rangle \simeq KC_\infty$

Para $\alpha = \sum a_n x^n \in K\langle x\rangle$, defina $\alpha^* = \sum a_n x^{-n}$.

Produto em KD_∞:
$(\alpha_1 + \beta_1 y)(\alpha_2 + \beta_2 y) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2^*) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2^*)y$

Podemos fazer a injeção: $KD_\infty \longrightarrow M_2(K\langle x\rangle)$,
$\alpha + \beta y \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ e definir $\det(d) = \alpha\alpha^* - \beta\beta^* \in K\langle x\rangle$.

KD_∞ não é um anel limpo

Exemplo

$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, yx = x^{-1}y \rangle \simeq \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq C_\infty \rtimes C_2$

$d \in KD_\infty$, $d = \alpha + \beta y$, $\alpha, \beta \in K\langle x \rangle \simeq KC_\infty$

Para $\alpha = \sum a_n x^n \in K\langle x \rangle$, defina $\alpha^* = \sum a_n x^{-n}$.

Produto em KD_∞:
$(\alpha_1 + \beta_1 y)(\alpha_2 + \beta_2 y) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2^*) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2^*)y$

Podemos fazer a injeção: $KD_\infty \longrightarrow M_2(K\langle x \rangle)$,
$\alpha + \beta y \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ e definir $\det(d) = \alpha\alpha^* - \beta\beta^* \in K\langle x \rangle$.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

$\det(\cdot) : KD_\infty \longrightarrow K\langle x\rangle$ não é um homomorfismo de anéis, mas preserva o produto.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

$\det(\cdot) : KD_\infty \longrightarrow K\langle x\rangle$ não é um homomorfismo de anéis, mas preserva o produto.

1. $u \in \mathcal{U}(KD_\infty) \implies \det(u) \in \mathcal{U}(K\langle x\rangle)$

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

$\det(\cdot): KD_\infty \longrightarrow K\langle x\rangle$ não é um homomorfismo de anéis, mas preserva o produto.

1. $u \in \mathcal{U}(KD_\infty) \implies \det(u) \in \mathcal{U}(K\langle x\rangle) \implies \det(u) = ax^n$, com $a \in K \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

$\det(\cdot) : KD_\infty \longrightarrow K\langle x \rangle$ não é um homomorfismo de anéis, mas preserva o produto.

1. $u \in \mathcal{U}(KD_\infty) \implies \det(u) \in \mathcal{U}(K\langle x \rangle) \implies \det(u) = ax^n$, com $a \in K \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
2. $e = \alpha + \beta y \in KD_\infty$, idempotente $\implies \det(e) \in K\langle x \rangle$, idempotente

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

$\det(\cdot) : KD_\infty \longrightarrow K\langle x\rangle$ não é um homomorfismo de anéis, mas preserva o produto.

1. $u \in \mathcal{U}(KD_\infty) \implies \det(u) \in \mathcal{U}(K\langle x\rangle) \implies \det(u) = ax^n$, com $a \in K \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
2. $e = \alpha + \beta y \in KD_\infty$, idempotente $\implies \det(e) \in K\langle x\rangle$, idempotente $\implies \det(e) = 0$ ou 1

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

$\det(\cdot): KD_\infty \longrightarrow K\langle x\rangle$ não é um homomorfismo de anéis, mas preserva o produto.

1. $u \in \mathcal{U}(KD_\infty) \implies \det(u) \in \mathcal{U}(K\langle x\rangle) \implies \det(u) = ax^n$, com $a \in K \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$ (unidades triviais).
2. $e = \alpha + \beta y \in KD_\infty$, idempotente $\implies \det(e) \in K\langle x\rangle$, idempotente $\implies \det(e) = 0$ ou 1

$$\implies \text{ ou } e = 0 \text{ ou } 1, \text{ or } \left\{ \text{algumas relações entre } \alpha \text{ e } \beta \right.$$

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x\rangle \subset KD_\infty$ da forma:

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x\rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x\rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.
(Note que $\gamma = \gamma^*$

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x \rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.
(Note que $\gamma = \gamma^*$
$\implies \det(\gamma) = \gamma\gamma^* = \gamma^2$

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x \rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.
(Note que $\gamma = \gamma^*$
$\Longrightarrow \det(\gamma) = \gamma\gamma^* = \gamma^2 = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n}$.)

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x\rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.
(Note que $\gamma = \gamma^*$
$\implies \det(\gamma) = \gamma\gamma^* = \gamma^2 = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n}$.)

Seja $e = \alpha + \beta y \in KD_\infty$ idempotente.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x\rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.
(Note que $\gamma = \gamma^*$
$\implies \det(\gamma) = \gamma\gamma^* = \gamma^2 = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n}$.)

Seja $e = \alpha + \beta y \in KD_\infty$ idempotente. Defina $u = \gamma - e$.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x\rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.
(Note que $\gamma = \gamma^*$
$\implies \det(\gamma) = \gamma\gamma^* = \gamma^2 = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n}$.)

Seja $e = \alpha + \beta y \in KD_\infty$ idempotente. Defina $u = \gamma - e$.

Se $e = 0$ ou 1, então $u = \gamma$ ou $\gamma - 1$,

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Considere $\gamma \in K\langle x \rangle \subset KD_\infty$ da forma:
$\gamma = c_n x^{-n} + \ldots + c_1 x^{-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$,
com $n > 0$, $c_0, \ldots, c_n \in K$, $c_n \neq 0$.
(Note que $\gamma = \gamma^*$
$\Longrightarrow \det(\gamma) = \gamma\gamma^* = \gamma^2 = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n}$.)

Seja $e = \alpha + \beta y \in KD_\infty$ idempotente. Defina $u = \gamma - e$.

Se $e = 0$ ou 1, então $u = \gamma$ ou $\gamma - 1$, mas nenhum dos dois é uma unidade em KD_∞.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Se $e = \alpha + \beta y$ é idempotente não trivial, então $u = \gamma - \alpha - \beta y$.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Se $e = \alpha + \beta y$ é idempotente não trivial, então $u = \gamma - \alpha - \beta y$.

Calculando $\det(u)$, usando as relações entre α e β, e o fato de que $\gamma = \gamma^*$:

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Se $e = \alpha + \beta y$ é idempotente não trivial, então $u = \gamma - \alpha - \beta y$.

Calculando $\det(u)$, usando as relações entre α e β, e o fato de que $\gamma = \gamma^*$:

$$\det(u) = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n},$$

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Se $e = \alpha + \beta y$ é idempotente não trivial, então $u = \gamma - \alpha - \beta y$.

Calculando $\det(u)$, usando as relações entre α e β, e o fato de que $\gamma = \gamma^*$:

$$\det(u) = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n},$$

que não é uma unidade em $K\langle x \rangle$.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Se $e = \alpha + \beta y$ é idempotente não trivial, então $u = \gamma - \alpha - \beta y$.

Calculando $\det(u)$, usando as relações entre α e β, e o fato de que $\gamma = \gamma^*$:

$$\det(u) = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n},$$

que não é uma unidade em $K\langle x\rangle$. Assim, $u \notin \mathcal{U}(KD_\infty)$.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Se $e = \alpha + \beta y$ é idempotente não trivial, então $u = \gamma - \alpha - \beta y$.

Calculando $\det(u)$, usando as relações entre α e β, e o fato de que $\gamma = \gamma^*$:

$$\det(u) = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n},$$

que não é uma unidade em $K\langle x \rangle$. Assim, $u \notin \mathcal{U}(KD_\infty)$.

Daí, γ não é um elemento limpo.

KD_∞ não é um anel limpo (cont.)

Exemplo (cont.)

Se $e = \alpha + \beta y$ é idempotente não trivial, então $u = \gamma - \alpha - \beta y$.

Calculando $\det(u)$, usando as relações entre α e β, e o fato de que $\gamma = \gamma^*$:

$$\det(u) = c_n^2 x^{-2n} + \ldots + c_n^2 x^{2n},$$

que não é uma unidade em $K\langle x \rangle$. Assim, $u \notin \mathcal{U}(KD_\infty)$.

Daí, γ não é um elemento limpo.

Assim, KD_∞ não é limpo.

O problema geral de Burnside

O problema geral de Burnside

[Um grupo é *de torção* (= periódico) se todo elemento seu tem ordem finita.

O problema geral de Burnside

[Um grupo é *de torção* (= periódico) se todo elemento seu tem ordem finita.
Problema geral de Burnside: Se G é um grupo de torção finitamente gerado, então G é necessariamente finito?]

O problema geral de Burnside

[Um grupo é *de torção* (= periódico) se todo elemento seu tem ordem finita.
Problema geral de Burnside: Se G é um grupo de torção finitamente gerado, então G é necessariamente finito?]

Teorema

Se G é um **grupo de torção** e o problema geral de Burnside tem resposta afirmativa para G, então KG é um anel limpo.

O problema geral de Burnside

[Um grupo é *de torção* (= periódico) se todo elemento seu tem ordem finita.
Problema geral de Burnside: Se G é um grupo de torção finitamente gerado, então G é necessariamente finito?]

Teorema

Se G é um **grupo de torção** e o problema geral de Burnside tem resposta afirmativa para G, então KG é um anel limpo.

Observação

Por exemplo, se G é um **grupo de torção** abeliano/nilpotente/supersolúvel, então o problema geral de Burnside tem resposta afirmativa;

O problema geral de Burnside

[Um grupo é *de torção* (= periódico) se todo elemento seu tem ordem finita.
Problema geral de Burnside: Se G é um grupo de torção finitamente gerado, então G é necessariamente finito?]

Teorema

Se G é um **grupo de torção** e o problema geral de Burnside tem resposta afirmativa para G, então KG é um anel limpo.

Observação

Por exemplo, se G é um **grupo de torção** abeliano/nilpotente/supersolúvel, então o problema geral de Burnside tem resposta afirmativa; logo KG é um anel limpo.

Caso 1: G é um grupo abeliano/nilpotente

Caso 1: G é um grupo abeliano/nilpotente

Já sabemos que, nesse caso, se G for um **grupo de torção**, então KG é um anel limpo.

Caso 1: G é um grupo abeliano/nilpotente

Já sabemos que, nesse caso, se G for um **grupo de torção**, então KG é um anel limpo.

Vejamos que G ser um **grupo de torção** também é uma condição necessária para KG ser um anel limpo.

Caso 1: G é um grupo abeliano/nilpotente

Já sabemos que, nesse caso, se G for um **grupo de torção**, então KG é um anel limpo.

Vejamos que G ser um **grupo de torção** também é uma condição necessária para KG ser um anel limpo.

Suponha que G é um grupo abeliano/nilpotente e não é de torção.

Caso 1.1: G é um grupo abeliano livre de torção

Caso 1.1: G é um grupo abeliano livre de torção

$$\mathcal{U}(KG) = \{ag \mid a \in K \setminus \{0\}, g \in G\} \text{ (unidades triviais)}$$

Caso 1.1: G é um grupo abeliano livre de torção

$\mathcal{U}(KG) = \{ag \mid a \in K \setminus \{0\}, g \in G\}$ (unidades triviais) (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Theorem 8.5.3])

Caso 1.1: G é um grupo abeliano livre de torção

$\mathcal{U}(KG) = \{ag \mid a \in K \setminus \{0\}, g \in G\}$ (unidades triviais) (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Theorem 8.5.3])

KG não tem divisores de zero

Caso 1.1: G é um grupo abeliano livre de torção

$\mathcal{U}(KG) = \{ag \mid a \in K \setminus \{0\}, g \in G\}$ (unidades triviais) (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Theorem 8.5.3])

KG não tem divisores de zero (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Exercise 1, Section 8.5])

Caso 1.1: G é um grupo abeliano livre de torção

$\mathcal{U}(KG) = \{ag \mid a \in K \setminus \{0\}, g \in G\}$ (unidades triviais) (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Theorem 8.5.3])

KG não tem divisores de zero (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Exercise 1, Section 8.5]) (e, portanto, KG não tem idempotentes não triviais).

Caso 1.1: G é um grupo abeliano livre de torção

$\mathcal{U}(KG) = \{ag \mid a \in K \setminus \{0\}, g \in G\}$ (unidades triviais) (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Theorem 8.5.3])

KG não tem divisores de zero (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Exercise 1, Section 8.5]) (e, portanto, KG não tem idempotentes não triviais).

Assim, KG não é limpo.

Caso 1.2: G é um grupo nilpotente livre de torção

Caso 1.2: G é um grupo nilpotente livre de torção

$\{1\} = \mathcal{Z}_0(G) \leq \mathcal{Z}_1(G) \leq \ldots \leq \mathcal{Z}_n(G) = G$ a série central superior de G

Caso 1.2: G é um grupo nilpotente livre de torção

$\{1\} = \mathcal{Z}_0(G) \leq \mathcal{Z}_1(G) \leq \ldots \leq \mathcal{Z}_n(G) = G$ a série central superior de G

$G/\mathcal{Z}_{n-1}(G)$ é um grupo abeliano livre de torção

Caso 1.2: G é um grupo nilpotente livre de torção

$\{1\} = \mathcal{Z}_0(G) \leq \mathcal{Z}_1(G) \leq \ldots \leq \mathcal{Z}_n(G) = G$ a série central superior de G

$G/\mathcal{Z}_{n-1}(G)$ é um grupo abeliano livre de torção (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Corollary 1.5.27]).

Caso 1.2: G é um grupo nilpotente livre de torção

$\{1\} = \mathcal{Z}_0(G) \leq \mathcal{Z}_1(G) \leq \ldots \leq \mathcal{Z}_n(G) = G$ a série central superior de G

$G/\mathcal{Z}_{n-1}(G)$ é um grupo abeliano livre de torção (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Corollary 1.5.27]).

Assim, pelo Caso 1.1, $K(G/\mathcal{Z}_{n-1}(G))$ não é um anel limpo

Caso 1.2: G é um grupo nilpotente livre de torção

$\{1\} = \mathcal{Z}_0(G) \leq \mathcal{Z}_1(G) \leq \ldots \leq \mathcal{Z}_n(G) = G$ a série central superior de G

$G/\mathcal{Z}_{n-1}(G)$ é um grupo abeliano livre de torção (Polcino Milies & Sehgal, 2002 [7, Corollary 1.5.27]).

Assim, pelo Caso 1.1, $K(G/\mathcal{Z}_{n-1}(G))$ não é um anel limpo e, portanto, KG não é limpo.

Caso 1.3: G é um grupo abeliano/nilpotente não livre de torção (e não é de torção)

Caso 1.3: G é um grupo abeliano/nilpotente não livre de torção (e não é de torção)

$T(G)$ conjunto dos elementos de torção de G

Caso 1.3: G é um grupo abeliano/nilpotente não livre de torção (e não é de torção)

$T(G)$ conjunto dos elementos de torção de G

Como G é abeliano/nilpotente, $T(G)$ é um subgrupo normal de G.

Caso 1.3: G é um grupo abeliano/nilpotente não livre de torção (e não é de torção)

$T(G)$ conjunto dos elementos de torção de G

Como G é abeliano/nilpotente, $T(G)$ é um subgrupo normal de G.

$G/T(G)$ é um grupo abeliano/nilpotente livre de torção.

Caso 1.3: G é um grupo abeliano/nilpotente não livre de torção (e não é de torção)

$T(G)$ conjunto dos elementos de torção de G

Como G é abeliano/nilpotente, $T(G)$ é um subgrupo normal de G.

$G/T(G)$ é um grupo abeliano/nilpotente livre de torção.

Pelo Caso 1.1/1.2, $K(G/T(G))$ não é um anel limpo.

Caso 1.3: G é um grupo abeliano/nilpotente não livre de torção (e não é de torção)

$T(G)$ conjunto dos elementos de torção de G

Como G é abeliano/nilpotente, $T(G)$ é um subgrupo normal de G.

$G/T(G)$ é um grupo abeliano/nilpotente livre de torção.

Pelo Caso 1.1/1.2, $K(G/T(G))$ não é um anel limpo.

Assim, KG não é limpo.

Caso 1: G é um grupo abeliano/nilpotente (Cont.)

Teorema

Sejam K um corpo,

Caso 1: G é um grupo abeliano/nilpotente (Cont.)

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo abeliano/nilpotente.

Caso 1: G é um grupo abeliano/nilpotente (Cont.)

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo abeliano/nilpotente.

KG é limpo $\iff$ G é um **grupo de torção**.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel

Caso 2: G é um grupo supersolúvel

[G é um grupo supersolúvel se possui uma série cíclica normal.]

Caso 2: G é um grupo supersolúvel

[G é um grupo supersolúvel se possui uma série cíclica normal.]

Já sabemos que, nesse caso, se G for um **grupo de torção**, então KG é um anel limpo.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel

[G é um grupo supersolúvel se possui uma série cíclica normal.]

Já sabemos que, nesse caso, se G for um **grupo de torção**, então KG é um anel limpo.

Vejamos que G ser um **grupo de torção** também é uma condição necessária para KG ser um anel limpo.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Se G é um grupo supersolúvel e não é de torção (em particular, G é infinito),

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Se G é um grupo supersolúvel e não é de torção (em particular, G é infinito), então $K(G/N) \simeq KC_\infty$ ou KD_∞,

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Se G é um grupo supersolúvel e não é de torção (em particular, G é infinito), então $K(G/N) \simeq KC_\infty$ ou KD_∞, nenhum dos quais é um anel limpo.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Se G é um grupo supersolúvel e não é de torção (em particular, G é infinito), então $K(G/N) \simeq KC_\infty$ ou KD_∞, nenhum dos quais é um anel limpo. Assim, KG não é limpo.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Se G é um grupo supersolúvel e não é de torção (em particular, G é infinito), então $K(G/N) \simeq KC_\infty$ ou KD_∞, nenhum dos quais é um anel limpo. Assim, KG não é limpo.

t

Teorema

Sejam K um corpo,

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Se G é um grupo supersolúvel e não é de torção (em particular, G é infinito), então $K(G/N) \simeq KC_\infty$ ou KD_∞, nenhum dos quais é um anel limpo. Assim, KG não é limpo.

t

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo supersolúvel.

Caso 2: G é um grupo supersolúvel (cont.)

Suponha que G é um grupo supersolúvel e não é de torção.

Lema (Passman, 1978 [8, Lemma 3.3.8])

Seja G um grupo supersolúvel infinito. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Se G é um grupo supersolúvel e não é de torção (em particular, G é infinito), então $K(G/N) \simeq KC_\infty$ ou KD_∞, nenhum dos quais é um anel limpo. Assim, KG não é limpo.

t

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo supersolúvel.

$$KG \text{ é limpo } \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Caso 3: G é um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito de índice finito

Caso 3: G é um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito de índice finito

Lema

Seja G um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito normal de índice finito H.

Caso 3: G é um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito de índice finito

Lema

Seja G um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito normal de índice finito H. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Caso 3: G é um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito de índice finito

Lema

Seja G um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito normal de índice finito H. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Teorema

Sejam K um corpo,

Caso 3: G é um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito de índice finito

Lema

Seja G um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito normal de índice finito H. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo contendo um subgrupo cíclico normal infinito de índice finito H.

Caso 3: G é um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito de índice finito

Lema

Seja G um grupo contendo um subgrupo cíclico infinito normal de índice finito H. Então G tem um subgrupo normal N com $G/N \simeq C_\infty$ ou D_∞.

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo contendo um subgrupo cíclico normal infinito de índice finito H.
Então KG não é limpo.

Resumo

Resumo

Nossos resultados até agora:

Resumo

Nossos resultados até agora:

Teorema

Sejam K um corpo,

Resumo

Nossos resultados até agora:

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo abeliano/nilpotente/supersolúvel.

Resumo

Nossos resultados até agora:

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo abeliano/nilpotente/supersolúvel.

$$KG \text{ é limpo } \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Resumo

Nossos resultados até agora:

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo abeliano/nilpotente/supersolúvel.

$$KG \text{ é limpo } \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Teorema

Sejam K um corpo,

Resumo

Nossos resultados até agora:

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo abeliano/nilpotente/supersolúvel.

$$KG \text{ é limpo} \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo contendo um subgrupo cíclico normal infinito de índice finito.

Resumo

Nossos resultados até agora:

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo abeliano/nilpotente/supersolúvel.

$$KG \text{ é limpo} \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Teorema

Sejam K um corpo, G um grupo contendo um subgrupo cíclico normal infinito de índice finito. Então KG não é limpo.

Trabalho futuro

Trabalho futuro

Nossos palpites:

Trabalho futuro

Nossos palpites:

Conjectura 1

Sejam K um corpo,

Trabalho futuro

Nossos palpites:

Conjectura 1

Sejam K um corpo, G um grupo.

Trabalho futuro

Nossos palpites:

Conjectura 1

Sejam K um corpo, G um grupo.

$$KG \text{ é limpo} \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Trabalho futuro

Nossos palpites:

Conjectura 1

Sejam K um corpo, G um grupo.

$$KG \text{ é limpo} \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Conjectura 2

Sejam K um corpo,

Trabalho futuro

Nossos palpites:

Conjectura 1

Sejam K um corpo, G um grupo.

$$KG \text{ é limpo} \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Conjectura 2

Sejam K um corpo, G um grupo.

Trabalho futuro

Nossos palpites:

Conjectura 1

Sejam K um corpo, G um grupo.

$$KG \text{ é limpo } \iff G \text{ é um } \textbf{grupo de torção}.$$

Conjectura 2

Sejam K um corpo, G um grupo.

$$KG \text{ é limpo } \iff G \text{ é um } \textbf{grupo localmente finito}.$$

V. P. Camillo, H.-P. Yu, *Exchange Rings, Units and Idempotents*, Communications in Algebra **22** (1994), 4737 – 4749.

J. Chen, W K. Nicholson, Y. Zhou, *Group rings in which every element is uniquely the sum of a unit and an idempotent*, Journal of Algebra **306** (2006), 453 – 460.

N. Jacobson, *Structure of rings*, rev. ed., AMS Colloquium Publications **37**, AMS, Providence, RI, 1964.

J. Han, W. K. Nicholson, *Extensions of clean rings*, Communications in Algebra **29** (2001), 2589–2595.

W. K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Transactions of the AMS **229** (1977), 269 – 278.

W. K. Nicholson, Y. Zhou, *Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit*, Glasgow Mathematical Journal **46** (2004), 227 – 236.

C. Polcino Milies, S. K. Sehgal, *An Introduction to Group Rings*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Dover Books on Mathematics, 2011.

X. Wang, H. You, *Cleanness of the Group Ring of an Abelian p-Group over a Commutative Ring*, Algebra Colloquium **19** (2012), 539 – 544.