Curvas Maximais em $\mathbb{P}^3$

Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri

31 de maio de 2014

Curvas Maximais

Seja $\mathcal{X}$ uma curva definida sobre um corpo finito $\mathbb{F} := \mathbb{F}_{q^2}$. Dizemos que $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}$-maximal se o número de seus pontos racionais atinge a cota de Hasse-Weil, ou seja,

$$\#\mathcal{X}(\mathbb{F}) = q^2 + 1 + 2gq \ ,$$

onde g é o gênero de $\mathcal{X}$.

Associada a $\mathcal{X}$, temos uma série linear em $\mathcal{D} = |(q+1)P_0|$, onde $P_0 \in \mathcal{X}$ é um ponto racional. Suponhamos que g satisfaça

$$\lfloor (q-1)(q-2)/6 \rfloor < g_{\mathcal{X}} \leq \lfloor (q^2 - q + 4)/6 \rfloor \,. \tag{1}$$

Por Castelnuovo temos que $\dim \mathcal{D} = 3$.

Seja $\phi_{\mathcal{D}} : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^3$ o morfismo associado a $\mathcal{D}$. ϕ é um mergulho, isto é, $\mathcal{X}$ é $\mathbb{F}$-isomorfa a $\phi(\mathcal{X})$. E ϕ é birracional. Assim, $\phi(\mathcal{X})$ é uma curva de grau $q + 1$.

Teorema

Se o gênero de $\mathcal{X}$ satisfaz (1), então $\mathcal{X}$ está contida numa única superfície cúbica S que está definida sobre $\mathbb{F}$.

Teorema (Ballico)

Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^3(\bar{\mathbb{F}})$ *uma curva irredutível de grau* d*, contida numa superfície irredutível* S *de grau* k*. Sejam* g *o gênero de* $\mathcal{X}$, $0 \leq \epsilon \leq k-1$, $d \equiv -\epsilon (\mod k)$ *e suponha* $d > k(k-1)$*, então temos*

$$g \leq \pi(d;k) = \frac{d^2}{2k} + \frac{1}{2}d(k-4) + 1 - \frac{\epsilon}{2}\left(k - \epsilon - 1 + \frac{\epsilon}{k}\right) .$$

Se $\mathcal{X}$ está contida numa superfície quártica, então

$$g \leq \begin{cases} \dfrac{q^2+2q+9}{8} & , \quad q \equiv 3(\mathrm{mod} 4) \ . \\ \dfrac{q^2+2q-3}{8} & , \quad q \equiv 1(\mathrm{mod} 4) \ . \\ \dfrac{q^2+2q}{8} & , \quad q \equiv 0,2(\mathrm{mod} 4) \ . \end{cases}$$

Teorema (Korchmáros -Torres)

Seja $\mathcal{X}$ uma curva $\mathbb{F}$-maximal de gênero g, e π um $\mathbb{F}$-morfismo associado a $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{X}} = |(q+1)P_0|$. Suponha $q \geq 7$. Então as seguintes condições são equivalentes:

1) $\lfloor (q^2 - q + 4)/6 \rfloor < g \leq \lfloor (q-1)^2/4 \rfloor$;
2) $\dim \mathcal{D} = 3$, $\pi(\mathcal{X})$ *está contida numa superfície quádrica em* $\mathbb{P}^3$, *e* $g \neq (q^2 - 2q + 3)/6$ *sempre que* $q \equiv 3, 5 (mod 6)$;
3) $\dim \mathcal{D} = 3, \dim(2\mathcal{D}) = 8$ *e* $g \neq (q^2 - 2q + 3/6)$ *sempre que* $q \equiv 3, 5 (mod 6)$;
4) $\dim \mathcal{D} = 3$ *e existe* $P \in \mathcal{X}(\mathbb{F})$ *tal que* $j_2(P) = (q+1)/2$ *se* q *é ímpar, ou* $j_2 = (q+2)/2$ *caso contrário;*
5) $\mathcal{X}$ *é* $\mathbb{F}$*-isomorfa ao modelo não-singular de* $y^q + y = x^{(q+1)/2}$ *se* q *é ímpar, ou* $y^{q/2} + y^{q/4} + \cdots + y^2 + y + 1 = x^{q+1}$ *caso contrário;*
6) $g = (q-1)^2/4$ *se* q *é ímpar, ou* $g = q(q-2)/4$ *caso contrário. Em particular o gênero* g *é igual ao número de Castelnuovo* $c_0(q+1, 3)$.

Queremos estudar como a reta tangente $L_1(P)$ intersecta a curva $\mathcal{X}$ num ponto racional $P \in \mathcal{X}$. Para isso devemos determinar os possíveis valores de j_2. Antes de determinarmos tais valores, alguns resultados serão úteis.

Lema

Para todo $P \in \mathcal{X}(\mathbb{F})$ temos que $2j_2 + 1 \neq j_3$.

Lema

Para todo $P \in \mathcal{X}(\mathbb{F})$ temos que $2j_2 \neq j_3 + 2$.

Teorema

Se o gênero de $\mathcal{X}$ satisfaz (1), então para $P \in \mathcal{X}(\mathbb{F})$, temos que

$$j_2 \in \left\{ 2, 3, \frac{j_3}{3}, \frac{j_3+1}{3}, \frac{j_3+2}{3}, \frac{2j_3}{3}, \frac{2j_3+1}{3} \right\} .$$

Ideia da Prova

Pelo Teorema 1 temos que $\mathcal{X}$ está contida numa única superfície cúbica S que está definida sobre $\mathbb{F}$. Sejam $x_0 = 1, x_1, x_2, x_3$ funções $\mathbb{F}$-racionais em $\mathcal{X}$, tais que $v_P(x_i) = j_i$.
Como $v_P(x_i) = j_i$ temos que $x_i(P) = 0, \ i = 1, 2, 3$ e $x_0(P) \neq 0$. Assim, $P = (x_0(P) : 0 : 0 : 0)$, ou seja, $P = (1 : 0 : 0 : 0)$.

Seja

$$
\begin{aligned}
F(X_0, X_1, X_2, X_3) = a_{000}X_0^3 + a_{001}X_0^2X_1 + a_{002}X_0^2X_2 + a_{003}X_0^2X_3 + a_{111}X_1^3 \\
+a_{110}X_1^2X_0 + a_{112}X_1^2X_2 + a_{113}X_1^2X_3 + a_{222}X_2^3 + a_{220}X_2^2X_0 \\
+a_{221}X_2^2X_1 + a_{223}X_2^2X_3 + a_{333}X_3^3 + a_{330}X_3^2X_0 + a_{331}X_3^2X_1 \\
+a_{332}X_3^2X_2 + a_{012}X_0X_1X_2 + a_{013}X_0X_1X_3 + a_{023}X_0X_2X_3 + a_{123}X_1X_2X_3
\end{aligned}
$$

a equação que define S. Como $F(P) = 0$ tem-se que $a_{000} = 0$.

Também temos que $F(1, x_1, x_2, x_3) = 0$, uma vez que $\mathcal{X} \subset S$. Calculando as valorizações das funções que aparecem em $F(1, x_1, x_2, x_3) = 0$ teremos

$$j_2 < j_2 + 1 < j_2 + 2 < j_3 < j_3 + 1 < j_3 + 2 < j_3 + j_2 < j_2 + j_3 + 1$$

$$< 2j_3 < 2j_3 + 1 < 2j_3 + j_2 < 3j_3,$$

e

$$2j_2 + j_3, 2j_2 + 1, 3j_2, 2j_2.$$

Os últimos 4 valores acima satisfazem

1. $j_2 + 2 < 2j_2 < j_3 + j_2$
2. $j_2 + 2 < 2j_2 + 1 < j_3 + j_2$
3. $j_2 + 2 < 3j_2 < 2j_3 + j_2$
4. $j_3 + j_2 + 1 < 2j_2 + j_3 < 2j_3 + j_2$

Também temos que $2j_2 < 2j_2 + 1 < 3j_2 < 2j_2 + j_3$, e que pelo menos uma dessas valorizações deve ser igual a alguma valorização de $F(1, x_1, x_2, x_3) = 0$, pois caso contrário teremos que $F(X_0, X_1, X_2, X_3) \equiv 0$, o que é uma contradição.

Dos lemas anteriores temos

(i) $2j_2 \in \{j_3, j_3 + 1\}$.

(ii) $3j_2 \in \{j_3, j_3 + 1, j_3 + 2, 2j_3, 2j_3 + 1\}$.

Temos que (ii) sempre ocorre, e o teorema está provado. ∎

Observação 1. Do Teorema anterior temos os seguintes casos:

- $j_2(P) \in \{2, 3\}$ qualquer que seja q.
- Para $q \equiv 0(\mathrm{mod} 3)$, $j_2(P) \in \left\{ \dfrac{q+3}{3}, \dfrac{2q+3}{3} \right\}$.
- Para $q \equiv 1(\mathrm{mod} 3)$, $j_2(P) = \dfrac{q+2}{3}$.
- Para $q \equiv 2(\mathrm{mod} 3)$, $j_2(P) \in \left\{ \dfrac{q+1}{3}, \dfrac{2q+2}{3} \right\}$.

Semigrupos Numéricos do Tipo $< q+1-j_2, q, q+1 >$

Seja B o semigrupo gerado por $q+1-j_2, q, q+1$, então temos as seguintes possibilidades para o gênero de B.

- $j_2 = 2 \Rightarrow g(B) = \lfloor \dfrac{(q-1)^2}{4} \rfloor$.
- $j_2 = 3 \Rightarrow g(B) = \lfloor \dfrac{q^2-q+4}{6} \rfloor$.
- $j_2 = \dfrac{q+2}{3}$ e $q \equiv 1 (\mathrm{mod} 3) \Rightarrow g(B) = \dfrac{q(q-1)}{6}$.
- $j_2 = \dfrac{q+1}{3}$ e $q \equiv 2 (\mathrm{mod} 3) \Rightarrow g(B) = \dfrac{q^2-q+4}{6}$.
- $j_2 = \dfrac{2q+2}{3}$ e $q \equiv 2 (\mathrm{mod} 3) \Rightarrow g(B) = \dfrac{(q-1)(q-2)}{6}$.

- $j_2 = \dfrac{q+3}{3}$ e $q \equiv 0(\mathrm{mod}3) \Rightarrow g(B) = \dfrac{q(q-1)}{6}$.
- $j_2 = \dfrac{2q+3}{3}$ e $q \equiv 0(\mathrm{mod}3) \Rightarrow g(B) = \dfrac{q(q-3)}{6}$.

Desses fatos temos a seguinte

Proposição

Seja $\mathcal{X}$ uma curva maximal de gênero g satisfazendo (1). Então, não existe P, ponto racional de $\mathcal{X}$ tal que:

i) $j_2(P) = \dfrac{2q+3}{3}$ *para* $q \equiv 0(mod3)$.

ii) $j_2(P) = \dfrac{2q+2}{3}$ *para* $q \equiv 2(mod3)$.

Referências

1 Ballico, E., *Space curves not contained in low degree surfaces in positive characteristic*, Note di Matematica, n. 2, 2000/2001, 27-33.

2 Cossidente, A., Korchmáros, G. and Torres, F., *Curves of large genus covered by the hermitian curve*, Comm. in Algebra, 28(10), 4707-4728 (2000).

3 Rosales, J.C. and García-Sánchez, P.A., *Numerical semigroups with embedding dimension three*, Arch. Math. **83**, 488-496(2004).