

Algumas questões sobre semigrupos numéricos gerados por dois elementos

29 de setembro de 2014

Matheus Bernardini de Souza - Unicamp

Dados p e q primos entre si, definimos $H_{p,q} := \langle p, q \rangle = \{ap + bq : a, b \in \mathbb{N}_0\}$. Estudamos dois problemas relacionados a esses semigrupos numéricos. O primeiro é:

Problema 1 *Seja*

$$\mathcal{H}_{p,q} := \{H \text{ semigrupo numérico} : H \supseteq H_{p,q}\}$$

e defina $n(p, q) = \#\mathcal{H}_{p,q}$. Existe alguma fórmula explícita para esse número $n(p, q)$? Essa depende apenas de p e q ?

Mostraremos que essa quantidade é um quasi-polinômio em q de grau $p - 1$ e coeficiente líder constante [3].

O segundo problema é:

Problema 2 *Dado $g \in \mathbb{N}_0$, defina*

$$n_g(2) := \#\{H_{a,b} : g(H_{a,b}) = g, 1 < a < b \text{ e } \text{mdc}(a, b) = 1\}.$$

Existe alguma fórmula explícita que dependa apenas de g para o número $n_g(2)$?

Responderemos a essa questão para os seguintes casos particulares: $2g - 1$ primo [2], $g = 2^k$ [2] e $g = p^k$, com p primo [1].

Referências

- [1] ELIAHOU, S., ALFONSÍN, J.R., *On the number of numerical semigroups $\langle a, b \rangle$ of prime power genus*. Semigroup Forum **87** (2013) 171-186.
- [2] ELIAHOU, S., ALFONSÍN, J.R., *Two-generator numerical semigroups and Fermat and Mersenne numbers*. Journal of Discret Math. Vol. 25 N. 2 (2011) 622-630.
- [3] HELLUS, M., WALDI, R., *On the number of numerical semigroups containing two coprime integers p and q (preprint)*.
- [4] KNEBL, H., KUNZ, E., WALDI, R., *Weierstrass semigroups and nodal curves of type p, q* . Journal of Algebra **348** (2011) 315 - 335.
- [5] KUNZ, E., WALDI, R., *Geometrical Illustration of Numerical Semigroups and Some of Their Invariant*. Semigroup Forum (to appear).
- [6] ROSALES, J.C., BRANCO, M.B., *The Frobenius Problem for numerical semigroups*. Journal of Number Theory **131** (2011), 2310-2319.
- [7] ROSALES, J.C., GARCIA-SÁNCHEZ P.A., *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, Springer New York, 2009.