

O contexto
Ideal da curva canônica
O caso $h_g = 2g - 3$
Espaços osculadores
Estratificação do espaço de moduli
Bibliografia

IMECC - UNICAMP

09/11/2018

Campinas - SP

Estratificação do espaço de moduli de curvas algébricas pontuadas

José Gilvan de Oliveira - UFES

09/11/2018

O contexto

Ideal da curva canônica

O caso $l_g = 2g - 3$

Espaços osculadores

Estratificação do espaço de moduli

Bibliografia

Artigo de referência

A stratification of the moduli space of pointed non-singular curves

Francisco L. R. Pimentel · Gilvan Oliveira
Geometriae Dedicata 194, 2018

Mergulho canônico

C curva algébrica não-singular e não-hiperelíptica, de gênero $g \geq 4$, definida sobre k algebricamente fechado

Fixado $P \in C$, consideramos

$$\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \dots, \omega_{l_g}$$

base de diferenciais regulares com ordens em P , respectivamente,

$$l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_g - 1$$

Mergulho canônico

$l_1, l_2, \dots, l_g \in \mathbb{N}$ são as *lacunas de Weierstrass*

$N = \mathbb{N} \setminus \{l_1, \dots, l_g\}$ é o *semigrupo de Weierstrass* de P .

Mergulho canônico

Identificando C com seu mergulho canônico

$$(\omega_{l_1} : \omega_{l_2} : \cdots : \omega_{l_g}) : C \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{g-1},$$

C é curva projetiva de grau $2g - 2$ em \mathbb{P}_k^{g-1} e $l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_g - 1$ são as multiplicidades de interseção de C com os hiperplanos em $P = (1 : 0 : \cdots : 0)$.

Ideal da Curva Canônica

(K Petri 1922, Stöhr/Viana 1988)

O ideal da curva canônica é gerado, respectivamente, por $(g - 2)(g - 3)/2$ formas quadráticas e $g - 3$ formas cúbicas:

$$F_{jk} \quad G_r$$

O espaço vetorial das dependências lineares de $X_i F_{jk}$ e G_r é gerado por explícitas sizíguas.

Ideal da Curva Canônica

- Petri: g pontos em posição geral
- Stöhr/Viana: $\ell_{g-1} = g - 1$
- Formas cúbicas apenas para a quártica plana ($g = 6$) e curvas trigonais (série linear g_3^1). Neste caso as formas quadráticas determinam um rolo normal racional (scroll).

Outros Destaques

- (Stöhr 1993, Stöhr/Contiero 2013)
Espaço de moduli de curvas de Gorenstein com semigrupo de Weierstrass simétrico $\ell_g = 2g - 1$
(Cotas melhores que as de Eisenbud/Harris e Deligne)

Outros Destaques

- (Oliveira, Stöhr 1997)
- * Curvas de Gorenstein com semigrupo de Weierstrass quasi-simétrico ($\ell_g = 2g - 2$)
- * Moduli de curvas de Gorenstein com sequência de lacuna de Weierstrass quasi-simétrica

Outros Destaques

- (Pimentel, 2004) Algoritmo para calcular o espaço de moduli no caso $1, 2, \dots, g - 2, \lambda, 2g - 3$
- Técnica de Stöhr:
 - ▶ Deformação de particular curva C^0 ,
 - ▶ Base de Gröbner
 - ▶ Análise de sizíguas

Outros Destaques

- (Kontsevich, Zorich 2003) Componentes conexas do espaço de moduli de pares (C, ω) , com os n zeros de ω de multiplicidades k_1, k_2, \dots, k_n .
- Caso $n = 1$
- Tema relacionado com importantes linhas de pesquisa, tais como: transformações de intercâmbio de intervalos, fluxo geodésico de Teichmüller e bilhar em polígono racional.

O contexto

Ideal da curva canônica

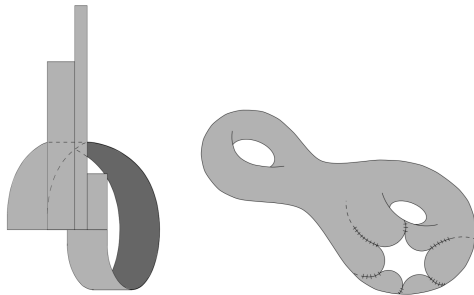
O caso $\ell_g = 2g - 3$

Espaços osculadores

Estratificação do espaço de moduli

Bibliografia

Outros Destaques



Semigrupos numéricos

Comentários

- $\ell_g = 2g - 1$: curva monomial irreduzível com uma única singularidade (Gorenstein)
- $\ell_g = 2g - 2$: curva com duas componentes irreduzíveis

Semigrupos numéricos

Se N é um semigrupo não-hiperelítico de gênero g
então

$$L_n \supseteq \{n, n+1, \dots, (n-1)l_g - 1\} \cup \{(n-1)l_g + l; l \in L\}$$

para cada $n \geq 2$.

Semigrupos numéricos

Além disso a igualdade vale para cada $n \geq 2$ se, e somente se, N é simétrico.

Neste caso

$$\# L_n = (2n - 1)(g - 1), \quad \text{for each } n \geq 2.$$

Manuscripta Mathematica, 71 (1991)

Semigrupos numéricos

Estudo dos semigrupos não-hiperelíticos

de gênero g com $\ell_g \geq 2g - 4$

Semigroup Forum, 69 (2004)

Se $\ell_g = 2g - 3$ então existem únicas lacunas

especiais $\mu < \lambda$

com $\mu + \lambda = \ell_g$.

Espaços osculadores

Espaço osculador $T^{(i)}$ de C em P de dimensão i , $i = 0, 1, \dots, g - 2$, é a interseção dos hiperplanos H que intersectam C em P com multiplicidade pelo menos $l_{i+2} - 1$.

Definimos

$$C.T^{(i)} = \sum_{Q \in C} \min\{\text{ord}_Q(C.H) \mid H \text{ hiperplano, } \text{ord}_P(C.H) \geq l_{i+2} - 1\} Q.$$

Espaços osculadores

Seja $E_{l_{i+2}} = C.T^{(i)} - (l_{i+2} - 1)P$.

A sequência $E_{l_2} \leq E_{l_3} \leq \dots \leq E_{l_g}$ é intrínseca de C e desigualdade ocorre apenas em lacunas especiais.

Além disso $E_{\lambda_q} < E_{l_g}$.

Em particular, se $l_g = 2g - 1$ ou $l_g = 2g - 2$ a sequência é única.

(Pimentel, Geometriae Dedicata, 85 (2001))

O caso $2g - 3$

Existem $Q, R \in C \setminus \{P\}$ não necessariamente distintos tais que

$$\operatorname{div}(\omega_{l_g}) = (2g - 4)P + Q + R$$

O caso $2g - 3$

Neste caso podemos ter duas sequências

$$\Delta_0: E_{l_2} = 0 = \dots = E_\lambda = 0 < Q + R = \dots = E_{l_g} = Q + R,$$

se $\deg E_\lambda = 0$, ou

$$\Delta_1: E_{l_2} = 0 = \dots = E_\mu = 0 < Q = \dots = E_\lambda = Q < \\ Q + R \dots = E_{l_g} = Q + R,$$

se $\deg E_\lambda = 1$

O caso $2g - 3$

Normalizações:

- $\text{div}(\omega_\ell) \geq Q + R$ para $\ell \neq \mu, \lambda$,
- Se $E_\lambda = 0$, temos $\text{ord}_Q(\omega_\lambda) = \text{ord}_R(\omega_\lambda) = 0$,
 $\text{ord}_Q(\omega_\mu) \geq 1$ (e $\text{ord}_R(\omega_\mu) = 0$, se $Q \neq R$),
- Se $E_\lambda \neq 0$, temos $\text{ord}_Q(\omega_\mu) = \text{ord}_R(\omega_\mu) = 0$,
 $\text{ord}_Q(\omega_\lambda) \geq 1$.

O caso $2g - 3$

Proposição

Se $E_\lambda \neq 0$ então $\lambda - \mu \in L$ e $2\mu \geq \lambda$.

O caso $2g - 3$

Teorema

Se $C \in T^{(m-2)}$ tem um ponto Q diferente de P , então o hiperplano que intersecta C em P com multiplicidade $\ell_g - 1$ tem multiplicidade 2 em Q .

Observação:

Se $E_\lambda \neq 0$ então $Q = R$.

O caso $2g - 3$

Para $n \geq 2$ existe uma base monomial

1. $\omega_{l_1}^i \omega_{a_s} \omega_{b_s} \omega_{l_g}^{n-2-i}$
($0 \leq i \leq n - 2; 2 \leq s \leq \ell_g$),
 $a_s + b_s = s, a_s \leq b_s$ e $a_s, b_s \in L$.
2. $\omega_{l_i} \omega_{l_g}^{n-1}$ ($i = 1, \dots, g$).
3. $\omega_r \omega_t^{n-j-1} \omega_{l_g}^j$ ($j = 0, 1, \dots, n - 3$).
4. $\omega_t^{n-j} \omega_{l_g}^j$ ($j = 0, 1, \dots, n - 2$).

O caso $2g - 3$

onde $(r, t) = (\mu, \lambda)$, se $E_\lambda = 0$, ou $(r, t) = (\lambda, \mu)$,
se $E_\lambda \neq 0$.

O caso $g = 6$

Se $g = 6$ então existem 6 semigroupos numéricos com $l_g = 9$ com lacunas

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4, 7, 9\}, \quad \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}, \quad \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}, \\ &\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}, \quad \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}, \quad \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}. \end{aligned}$$

Todos eles são semigrupos de Weierstrass.

Na primeira linha temos $2\mu < \lambda$ e $E_\lambda = 0$ em P .

Na segunda temos $2\mu \geq \lambda$ e se $E_\lambda \neq 0$ então

$$\operatorname{div}(\omega_{l_g}) = 8P + 2Q$$

Estratificação do espaço de moduli

$\mathcal{M}_{g,1}$ o espaço de moduli de curvas não-singulares pontuadas de gênero g .

$\mathcal{M}_{g,1}^N$ a subvariedade localmente fechada com semigrupo de Weierstrass $N = \mathbb{N} - L$ em P , (Eisenbud/Harris).

Teorema

Existe uma estratificação do espaço de moduli $\mathcal{M}_{g,1}^N = \mathcal{M}_{g,1}^{N,\Delta_0} \cup \mathcal{M}_{g,1}^{N,\Delta_1}$ em duas subvariedades localmente fechadas disjuntas.

Estratificação do espaço de moduli

Corolário

Se $\lambda - \mu \notin L$ ou $\lambda - \mu \in L$ e $2\mu < \lambda$
então $\mathcal{M}_{g,1}^{N,\Delta_1}$ é vazio.

Observação

Todos os semigrupos do exemplo de gênero 6 com $\lambda - \mu \notin L$ satisfazem $2\mu < \lambda$. Isso não é necessário. Em gênero $g = 7$ o semigrupo numérico com lacunas 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11 é Weierstrass (Stöhr/Viana, 1992) e tem $2\mu > \lambda$ mas $\lambda - \mu = 3 \notin L$. Em ambos casos temos $\mathcal{M}_{g,1}^{N,\Delta_1} = \emptyset$.

Exemplos

Os semigrupos com lacunas

$$1, 2, \dots, 2k - 1, 3k - 1, 4k - 1, \text{ for } k \geq 2,$$

são exemplos com $\mathcal{M}_{g,1}^{N,\Delta_1} = \emptyset$, (Medeiros, 2002).

Temos que $\lambda - \mu \in L$ e $2\mu < \lambda$. Outros exemplos
examplos

$$\{1, 2, \dots, 2k - 2, 3k - 3, 4k - 3\}, \text{ for } k \geq 4.$$

Temos semigrupos com $\mathcal{M}_{g,1}^{N,\Delta_1} = \emptyset$ para cada
 $g \geq 7$.

Codimensão

Corolário

Se $\mathcal{M}_{g,1}^N$ é irredutível e $\mathcal{M}_{g,1}^{N,\Delta_1}$ não é vazio então sua codimensão em $\mathcal{M}_{g,1}^N$ é menor ou igual a 1.

Exemplos

Seja \tilde{N} com lacunas $1, 2, \dots, 12, 19, 21, 24, 25$
(Buchweitz $g = 16$).





$N \setminus \{2g - 53\}$, com $g \geq 101$ e
 $N = 2\tilde{N} \cup \{2g - 3 - 2r / r \in \mathbb{Z} \setminus \tilde{N}, r < 25\}$, é
simétrico de gênero $g - 1$ e não é Weierstrass
(Stöhr, Torres).

Então N tem gênero $g \geq 101$ e $\ell_g = 2g - 3$.
Pelas mesmas razões N não é Weierstrass.

Espaço de moduli

E agora, o que segue?





Bibliografia

-  D. Eisenbud, H. Harris, Invent. Math. **87** (1987), 495-515.
-  J. Kameda, J. Pure Appl. Algebra **97** (1994), 51-71.
-  N. Medeiros, J. Pure Appl. Algebra **170** (2002), 267-285.
-  G. Oliveira, Manuscripta Math. **71**, (1991), 431-450.

Bibliografia

-  G. Oliveira, K.-O. Stöhr, *Geom. Dedicata* **67** (1997), 45-63.
-  G. Oliveira, K.-O. Stöhr, *Geom. Dedicata* **67** (1997), 65-82.
-  F. Pimentel, *J. Algebra* **276** (2004), 280-291.
-  F. Pimentel, *Geom. Dedicata* **85** (2001), 125-134.

Bibliografia

-  M. Kontsevich and A. Zorich Invent. Math. **153** (2003), 631–678.
-  K.-O. Stöhr, J. reine angew. Math. **441** (1993), 189-213.
-  K.-O. Stöhr, P. Viana, J. Pure Appl. Algebra **81** (1992), 63-82.
-  F. Torres, Manuscripta Math. **83** (1994), 39-58.

Obrigado

jgilvanol@gmail.com