Semigrupos numéricos e conjunto de Apéry

GILBERTO BRITO A. FILHO

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC

Curvas Algébricas e temas afins - CAta

Objetivos

Objetivos

- Semigrupos numéricos como solução de sistemas de inequações;

Objetivos

- Semigrupos numéricos como solução de sistemas de inequações;
- Semigrupos numéricos com embedding dimension máxima;

Objetivos

- Semigrupos numéricos como solução de sistemas de inequações;
- Semigrupos numéricos com embedding dimension máxima;
- Relação entre o conjunto Apéry e a conjetura de M. Bras;

Objetivos

- Semigrupos numéricos como solução de sistemas de inequações;
- Semigrupos numéricos com embedding dimension máxima;
- Relação entre o conjunto Apéry e a conjetura de M. Bras;
- Relação entre conjunto Apéry e a conjetura de Wilf.

Objetivos

- Semigrupos numéricos como solução de sistemas de inequações;
- Semigrupos numéricos com embedding dimension máxima;
- Relação entre o conjunto Apéry e a conjetura de M. Bras;
- Relação entre conjunto Apéry e a conjetura de Wilf.

Preliminares:

- Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é dito um semigrupo numérico se S é um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \backslash S$ é finito.

Preliminares:

- Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é dito um semigrupo numérico se S é um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito.
- $\mathbb{N}_0 \setminus S = G(S) = \{l_1 < ... < l_g\}$ é o conjunto da lacunas de S;

Preliminares:

- Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é dito um semigrupo numérico se S é um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito.
- $\mathbb{N}_0 \setminus S = G(S) = \{l_1 < ... < l_g\}$ é o conjunto da lacunas de S;
- $g = g(S) = \sharp G(S)$ é o gênero de S;

Preliminares:

- Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é dito um semigrupo numérico se S é um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \backslash S$ é finito.
- $\mathbb{N}_0 \backslash S = G(S) = \{l_1 < ... < l_g\}$ é o conjunto da lacunas de S;
- $g = g(S) = \sharp G(S)$ é o gênero de S;
- $F(S) = max\{G(S)\}$ é chamado número de Frobenius de S;

Preliminares:

- Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é dito um semigrupo numérico se S é um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \backslash S$ é finito.
- $\mathbb{N}_0 \backslash S = G(S) = \{l_1 < ... < l_g\}$ é o conjunto da lacunas de S;
- $g = g(S) = \sharp G(S)$ é o gênero de S;
- $F(S) = max\{G(S)\}$ é chamado número de Frobenius de S;
- $m(S) = min\{x \in S | \ x \neq 0\}$ é chamado de multiplicidade de S;

Preliminares:

- Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é dito um semigrupo numérico se S é um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \backslash S$ é finito.
- $\mathbb{N}_0 \backslash S = G(S) = \{l_1 < ... < l_g\}$ é o conjunto da lacunas de S;
- $g = g(S) = \sharp G(S)$ é o gênero de S;
- $F(S) = max\{G(S)\}$ é chamado número de Frobenius de S;
- $m(S) = min\{x \in S |\ x \neq 0\}$ é chamado de multiplicidade de S;
- A cardinalidade do conjunto de geradores minimais de S é chamada embedding dimension de S e denotada por $e(S)$.

Definição:

Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. O conjunto de Apéry de n em S é o conjunto

$$Ap(S, n) = \{0, w(1), ..., w(n-1)\}$$

onde $w(i)$ é o menor elemento de S tal que $w(i) \equiv_n i$ para cada $i = 1, ..., n-1$.

Definição:

Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. O conjunto de Apéry de n em S é o conjunto

$$Ap(S, n) = \{0, w(1), ..., w(n-1)\}$$

onde $w(i)$ é o menor elemento de S tal que $w(i) \equiv_n i$ para cada $i = 1, ..., n-1$.

Exemplo: Seja $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$. Então $Ap(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$.

Definição:

Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. O conjunto de Apéry de n em S é o conjunto

$$Ap(S, n) = \{0, w(1), ..., w(n-1)\}$$

onde $w(i)$ é o menor elemento de S tal que $w(i) \equiv_n i$ para cada $i = 1, ..., n-1$.

Exemplo: Seja $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$. Então $Ap(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$.

Note que podemos escrever

$$w(i) = k_i n + i, \text{ onde } k_i \geq 0.$$

Semigrupos numéricos e sistemas de inequações

Sistema de equações e semigrupos numéricos

Vamos denotar por $\mathcal{J}(m)$ a família de semigrupos numéricos com multiplicidade m.

Sistema de equações e semigrupos numéricos

Vamos denotar por $\mathcal{J}(m)$ a família de semigrupos numéricos com multiplicidade m.

Considere o sistema a seguir.

$$(I) := \begin{cases} x_i \geq 1, \\ x_i + x_j \geq x_{i+j}, \text{ se } 1 \leq i,j \leq m-1,\ i+j < m \\ x_i + x_j + 1 \geq x_{i+j-m}, \text{ se } 1 \leq i,j \leq m-1,\ i+j > m \\ x_i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vamos denotar por $\mathcal{J}(m)$ a família de semigrupos numéricos com multiplicidade m.

Considere o sistema a seguir.

$$(I) := \begin{cases} x_i & \geq & 1, \\ x_i + x_j & \geq & x_{i+j}, \text{ se } 1 \leq i, j \leq m-1, \ i+j < m \\ x_i + x_j + 1 & \geq & x_{i+j-m}, \text{ se } 1 \leq i, j \leq m-1, \ i+j > m \\ x_i & \in & \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Denotamos por $\Im(m)$ o conjunto de soluções não negativas do sistema (I).

Seja $S \in \mathcal{J}(m)$ com $Ap(S, m) = \{0, w(1), ..., w(m-1)\}$. Então

Seja $S \in \mathcal{J}(m)$ com $Ap(S, m) = \{0, w(1), ..., w(m-1)\}$. Então

1. $S = \langle m, Ap(S, m) \rangle$;

Seja $S \in \mathcal{J}(m)$ com $Ap(S, m) = \{0, w(1), ..., w(m-1)\}$. Então

1. $S = \langle m, Ap(S, m) \rangle$;
2. O conjunto de geradores minimais de S está contido em $Ap(S, m)$ e $e(S) \leq m$;

Seja $S \in \mathcal{J}(m)$ com $Ap(S, m) = \{0, w(1), ..., w(m-1)\}$. Então

1. $S = \langle m, Ap(S, m) \rangle$;
2. O conjunto de geradores minimais de S está contido em $Ap(S, m)$ e $e(S) \leq m$;
3. $w(i) = k_i n + i$, o Kunz-coordinate vector $(k_1, ..., k_{m-1})$.

Seja $S \in \mathcal{J}(m)$ com $Ap(S,m) = \{0, w(1), ..., w(m-1)\}$. Então

1. $S = \langle m, Ap(S,m) \rangle$;
2. O conjunto de geradores minimais de S está contido em $Ap(S,m)$ e $e(S) \leq m$;
3. $w(i) = k_i n + i$, o Kunz-coordinate vector $(k_1, ..., k_{m-1})$.

Dizemos que S é *MED*-semigrupo se $e(S) = m(S)$.

Denotamos por $\mathscr{MED}(m)$ a família dos semigrupos numéricos com multiplicidade m e embedding dimension maximal.

Na segunda parte da apresentação vamos ver alguns resultados sobre estes semigrupos.

Observamos que o único semigrupo numérico com $m(S) = 1$ é $S = \mathbb{N}_0$.

Neste seminário vamos considerar $m(S) > 1$.

Proposição ($\star$):

Seja $m > 1$ um inteiro. Considere

$$X = \{0 = w(0), w(1), ..., w(m-1)\} \subset \mathbb{N}_0$$

com $w(i) \equiv_m i$ e $m < w(i)$ para cada i. Então $S = \langle m, X \rangle \in \mathcal{J}(m)$. Além disso,

$$\begin{aligned} Ap(S, m) = X \quad \Leftrightarrow \quad & \text{para cada } i, j \text{ existe } k = 0, ..., m-1 \\ \text{e} \quad & t \in \mathbb{N} \text{ tais que } w(i) + w(j) = w(k) + tm. \end{aligned}$$

Prova: Imediato das definições.

Lema:

Seja m um inteiro maior que 1 e seja S em $S(g, m)$ com $Ap(S, m) = \{0, w_1, ..., w_{m-1}\}$ onde $w_i = k_i m + i$. Então $(k_1, ..., k_{m-1})$ é solução do sistema (I).

Lema:

Seja m um inteiro maior que 1 e seja S em $S(g, m)$ com $Ap(S, m) = \{0, w_1, ..., w_{m-1}\}$ onde $w_i = k_i m + i$. Então $(k_1, ..., k_{m-1})$ é solução do sistema (I).

Prova: Como m é multiplicidade, então $k_i \geq 1$. Se $i + j \leq m - 1$ então

$$w(i) + w(j) = (k_i + k_j)m + i + j \geq w(i + j) = k_{i+j}m + (i + j)$$

logo $k_i + k_j \geq k_{i+j}$. Se $i + j > m$ então

$$w(i)+w(j) = (k_i+k_j)m+i+j \text{ e } (k_i+k_j+1)m+i+j-m \equiv_m i+j-m,$$

logo

$$(k_i + k_j + 1)m + i + j - m \geq w(i + j - m) = k_{i+j-m}m + i + j - m,$$

ie, $k_i + k_j + 1 \geq k_{i+j-m}$. $\square$

Note que com isto temos uma aplicação entre $\mathcal{J}(m)$ e $\Im(m)$ que a cada S associa o Kuns-coordinate $(k_1, ..., k_{m-1})$.

Note que com isto temos uma aplicação entre $\mathcal{J}(m)$ e $\Im(m)$ que a cada S associa o Kuns-coordinate $(k_1, ..., k_{m-1})$.

Lema:

Seja m um inteiro maior que 1. Para $(k_1, ..., k_{m-1}) \in \Im(m)$ o semigrupo

$$S = \langle m, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1} \rangle \in \mathcal{J}(m)$$

e $Ap(S, m) = \{0, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1}\}$

Note que com isto temos uma aplicação entre $\mathcal{J}(m)$ e $\Im(m)$ que a cada S associa o Kuns-coordinate $(k_1, ..., k_{m-1})$.

Lema:

Seja m um inteiro maior que 1. Para $(k_1, ..., k_{m-1}) \in \Im(m)$ o semigrupo

$$S = \langle m, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1} \rangle \in \mathcal{J}(m)$$

e $Ap(S, m) = \{0, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1}\}$

De fato, basta usar a Proposição $(\star)$ para o conjunto

$$X = \{0, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1}\}.$$

Note que com isto temos uma aplicação entre $\mathcal{J}(m)$ e $\Im(m)$ que a cada S associa o Kuns-coordinate $(k_1, ..., k_{m-1})$.

Lema:

Seja m um inteiro maior que 1. Para $(k_1, ..., k_{m-1}) \in \Im(m)$ o semigrupo

$$S = \langle m, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1} \rangle \in \mathcal{J}(m)$$

e $Ap(S, m) = \{0, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1}\}$

De fato, basta usar a Proposição $(\star)$ para o conjunto

$$X = \{0, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1}\}.$$

Teorema:

Existe uma aplicação $1 - 1$ $\psi : \Im(m) \longrightarrow \mathcal{J}(m)$ definida por

$$\psi(k_1, ..., k_{m-1}) = \langle m, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1} \rangle.$$

Note que com isto temos uma aplicação entre $\mathcal{J}(m)$ e $\Im(m)$ que a cada S associa o Kuns-coordinate $(k_1, ..., k_{m-1})$.

Lema:

Seja m um inteiro maior que 1. Para $(k_1, ..., k_{m-1}) \in \Im(m)$ o semigrupo

$$S = \langle m, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1} \rangle \in \mathcal{J}(m)$$

e $Ap(S, m) = \{0, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1}\}$

De fato, basta usar a Proposição $(\star)$ para o conjunto

$$X = \{0, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1}\}.$$

Teorema:

Existe uma aplicação $1 - 1$ $\psi : \Im(m) \longrightarrow \mathcal{J}(m)$ definida por

$$\psi(k_1, ..., k_{m-1}) = \langle m, 1 + mk_1, ..., m - 1 + mk_{m-1} \rangle.$$

A demonstração segue diretamente dos lemas anteriores.

Agora vamos usar esses resultados para construir todos semi-grupos numéricos com multiplicidade 5 e número de Frobenius $f = 13$.

Agora vamos usar esses resultados para construir todos semigrupos numéricos com multiplicidade 5 e número de Frobenius $f = 13$.

Exemplo:

Se S semigrupo numérico nestas condições, então $Ap(S, m) = \{0, 1 + 5k_1, ..., 4 + 5k_4\}$. Como $f = maxAp(S, m) - 5$, então $maxAp(S, m) = 18(\equiv_5 3)$.
Logo $k_3 = 3$ e como $14, 15, ...$ estão em S temos que $k_1 \leq 3$, $k_2 \leq 3$ e $k_4 \leq 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} S(m = 5, f = 13) &= \{\langle 5, 1 + 5k_1, ..., 4 + 5k_4\rangle \mid (k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &\in \Im(5), k_1 \leq 3,\ k_2 \leq 3,\ k_4 \leq 2\} \end{aligned}$$

Conjunto de Apéry e multiplicidade 3 ou 4

Vamos lembrar algumas propriedades já conhecidas para um semigrupo numérico S.

Vamos lembrar algumas propriedades já conhecidas para um semigrupo numérico S.

Fatos:

1. $F(S) = max\{Ap(S, m)\} - m$;

Vamos lembrar algumas propriedades já conhecidas para um semigrupo numérico S.

Fatos:

1. $F(S) = max\{Ap(S, m)\} - m$;
2. $g(S) = \frac{\sum w(i)}{m} - (\frac{m-1}{2})$;

Vamos lembrar algumas propriedades já conhecidas para um semigrupo numérico S.

Fatos:

1. $F(S) = max\{Ap(S, m)\} - m$;
2. $g(S) = \frac{\sum w(i)}{m} - (\frac{m-1}{2})$;
3. Se $S =< a, b >$ então $g(S) = \frac{(a-1(b-1)}{2}$ e $F(S) = ab-a-b$.

Vamos lembrar algumas propriedades já conhecidas para um semigrupo numérico S.

Fatos:

1. $F(S) = max\{Ap(S, m)\} - m$;
2. $g(S) = \frac{\sum w(i)}{m} - (\frac{m-1}{2})$;
3. Se $S =< a, b >$ então $g(S) = \frac{(a-1(b-1)}{2}$ e $F(S) = ab-a-b$.

Agora vamos utilizar o os itens $(1), (2)$ para descrever $Ap(S, m)$ quando $m = 3, 4$.

Proposição:

Seja S um semigrupo com multiplicidade 3. Então

$$Ap(S, 3) = \{0 < 3g - f < f + 3\}.$$

Proposição:

Seja S um semigrupo com multiplicidade 3. Então

$$Ap(S,3) = \{0 < 3g - f < f + 3\}.$$

Corolário:

Dois semigrupos numéricos com multiplicidade 3 são iguais se, e somente se, tem mesmo gênero e número de Frobenius.

Proposição:

Seja S um semigrupo com multiplicidade 4. Então $Ap(S,4) = \{0 < R < 4g - f - R + 2 < f + 4\}$, onde $R = min\{Ap(S,m)\}$.

$R := min\{Ap(S,m)\}$ é chamado de raio de semigrupo.

Proposição:

Seja S um semigrupo com multiplicidade 4. Então $Ap(S,4) = \{0 < R < 4g - f - R + 2 < f + 4\}$, onde $R = min\{Ap(S,m)\}$.

$R := min\{Ap(S,m)\}$ é chamado de raio de semigrupo.

Corolário:

Dois semigrupos numéricos com multiplicidade 3 são iguais se, e somente se, tem mesmo gênero, raio e número de Frobenius.

O próximo resultado classifica todos os semigrupos com multiplicidade 4.

Teorema:

Seja S um semigrupos com multiplicidade 4. Então

$$Ap(S,4) = A_i$$

com A_i satisfazendo uma das condições C_i a seguir:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{0 < 4k+1 < 4(k+x)+2 < 4(k+x+y)+3\},\ (C_1): x,y \geq k;\\
A_2 &= \{0 < 4k+1 < 4(k+x)+3 < 4(k+x+y)+6\},\ (C_2):\ x+y \geq k-1;\\
A_3 &= \{0 < 4k+2 < 4(k+x)+5 < 4(k+x+y)+6\},\ (C_3):\ y \geq k;\\
A_4 &= \{0 < 4k+2 < 4(k+x)+3 < 4(k+x+y)+7\},\ (C_4):\ y \geq k-1;\\
A_5 &= \{0 < 4k+3 < 4(k+x)+6 < 4(k+x+y)+9\},\ (C_5):\ x,y \geq k;\\
A_6 &= \{0 < 4k+3 < 4(k+x)+5 < 4(k+x+y)+6\},\ (C_6):\ y+x \geq k-1
\end{aligned}$$

Problema:

Dado um semigrupo S é possível descrever os elementos do conjunto de Apéry para $m \geq 5$ através do gênero, numero de Frobenius e ratio de S?

Conjectura de M. Bras e

Apéry conjunto

Conjectura de M. Bras-Amoros

Denote por $S(g)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos de gênero g e $n_g = \#S(g)$.

M. Bras-Amorós postulou:

Denote por $S(g)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos de gênero g e $n_g = \#S(g)$.

M. Bras-Amorós postulou:

Conjectura (A)

Para cada $g \geq 0$ temos

$$n_g \leq n_{g+1}$$

Conjectura de M. Bras-Amoros

Denote por $S(g)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos de gênero g e $n_g = \#S(g)$.

M. Bras-Amorós postulou:

Conjectura (A)

Para cada $g \geq 0$ temos

$$n_g \leq n_{g+1}$$

Vamos apresentar alguns resultados utilizando Apéry conjunto no estudo desta conjectura.

Considere os seguintes lemas

Considere os seguintes lemas

Lema:

Suponha $2g < 3m$ com $S = \langle m, mk_1 + 1, ..., mk_{m-1} + m - 1\rangle \in S(g, m)$. Então

$$k_{m-1} \leq 2.$$

Lema:

Suponha $2g < 3m$ com $S =< m, mk_1 + 1, ..., mk_{m-1} + m - 1 >\in S(g, m)$. Então para cada $i = 1, ..., m - 1$ temos que

$$k_i \leq 3.$$

Com os lemas anteriores temos o seguinte teorema.

Teorema

Suponha $2g < 3m$. Então

$$N(m, g) = N(m-1, g-1) + N(m-1, g-2).$$

Como consequência, obtemos:

Com os lemas anteriores temos o seguinte teorema.

Teorema

Suponha $2g < 3m$. Então

$$N(m, g) = N(m-1, g-1) + N(m-1, g-2).$$

Como consequência, obtemos:

Proposição:

Para todo $k \geq 0$ existe um polinômio de grau $k+1$, $f_k(x)$ tal que para $m > 2k$ tem-se $N(m, m+k) = \frac{f_k(m)}{(k+1)!}$.

Kaplan admitiu que descrever o conjunto $S(m, g)$ quando $3m \leq 2g$ é um problema bem difícil.

Quais técnicas podemos utilizar para abordar esse problema?

Usando a proposição anterior, obtemos.

Usando a proposição anterior, obtemos.

Corolário:

1. Para $m \geq 1$ $N(m, m-1) = 1$;

Usando a proposição anterior, obtemos.

Corolário:

1. Para $m \geq 1$ $N(m, m-1) = 1$;
2. Para $m \geq 1$ $N(m, m) = m - 1$;

Usando a proposição anterior, obtemos.

Corolário:

1. Para $m \geq 1$ $N(m, m-1) = 1$;
2. Para $m \geq 1$ $N(m, m) = m - 1$;
3. Para $m \geq 2$ $N(m, m+1) = \frac{m^2-3m+4}{2}$;

Usando a proposição anterior, obtemos.

Corolário:

1. Para $m \geq 1$ $N(m, m-1) = 1$;
2. Para $m \geq 1$ $N(m, m) = m - 1$;
3. Para $m \geq 2$ $N(m, m+1) = \frac{m^2-3m+4}{2}$;
4. Para $m \geq 4$ $N(m, m+2) = \frac{m^3-6m^2+17m}{6}$;

Usando a proposição anterior, obtemos.

Corolário:

1. Para $m \geq 1$ $N(m, m-1) = 1$;
2. Para $m \geq 1$ $N(m, m) = m - 1$;
3. Para $m \geq 2$ $N(m, m+1) = \frac{m^2 - 3m + 4}{2}$;
4. Para $m \geq 4$ $N(m, m+2) = \frac{m^3 - 6m^2 + 17m}{6}$;
5. Para $m \geq 6$ $N(m, m+3) = \frac{m^4 - 10m^3 + 47m^2 - 38m + 48}{24}$;

Usando a proposição anterior, obtemos.

Corolário:

1. Para $m \geq 1$ $N(m, m-1) = 1$;
2. Para $m \geq 1$ $N(m, m) = m - 1$;
3. Para $m \geq 2$ $N(m, m+1) = \frac{m^2-3m+4}{2}$;
4. Para $m \geq 4$ $N(m, m+2) = \frac{m^3-6m^2+17m}{6}$;
5. Para $m \geq 6$ $N(m, m+3) = \frac{m^4-10m^3+47m^2-38m+48}{24}$;
6. Para $m \geq 8$ $N(m, m+4) = \frac{m^5-15m^4+105m^3-225m^2+347m+240}{120}$;

Usando a proposição anterior, obtemos.

Corolário:

1. Para $m \geq 1$ $N(m, m-1) = 1$;
2. Para $m \geq 1$ $N(m, m) = m - 1$;
3. Para $m \geq 2$ $N(m, m+1) = \frac{m^2-3m+4}{2}$;
4. Para $m \geq 4$ $N(m, m+2) = \frac{m^3-6m^2+17m}{6}$;
5. Para $m \geq 6$ $N(m, m+3) = \frac{m^4-10m^3+47m^2-38m+48}{24}$;
6. Para $m \geq 8$ $N(m, m+4) = \frac{m^5-15m^4+105m^3-225m^2+347m+240}{120}$;
7. Para $m \geq 10$
   $N(m, m+5) = \frac{m^6-21m^5+205m^4-795m^3+1954m^2+94m+2880}{720}$;

Kaplan introduziu duas novas conjecturas :

Kaplan introduziu duas novas conjecturas :

Conjectura (A1):

Para qualquer $m \geq 2$

$$N(m, g) \leq N(m, g + 1).$$

Kaplan introduziu duas novas conjecturas :

Conjectura (A1):

Para qualquer $m \geq 2$

$$N(m, g) \leq N(m, g + 1).$$

Conjectura (A2):

Para $m > 1$ e $g > 1$

$$N(m, g) \leq N(m + 1, g + 1)$$

Lembramos que um semigrupo S é $\gamma-$hiperelíptico se possui exatamente γ lacunas pares.

Lembramos que um semigrupo S é $\gamma-$hiperelíptico se possui exatamente γ lacunas pares.

Lema

Se S é $\gamma-$hiperelíptico, então $3\gamma \leq 2g$.

Lembramos que um semigrupo S é $\gamma-$hiperelíptico se possui exatamente γ lacunas pares.

Lema

Se S é $\gamma-$hiperelíptico, então $3\gamma \leq 2g$.

Notação: $S_\gamma(g) = \{S \in S(g) | \ \gamma_2(S) = \gamma\}$, onde $\gamma_2(S) = \sharp G_2(S)$. Denotamos por $N_\gamma(g) = \sharp S_\gamma(g)$.

Então $S(g) = \bigcup S_\gamma(g)$ e

$$n_g = \sum N_\gamma(g).$$

Temos também a seguinte aplicação $\phi : S_\gamma(g) \to S(\gamma)$ onde $\phi(S) = \frac{S}{2}$.

Lema:

Seja $S \in S_\gamma(g)$. Então $\phi(S) \in S(\gamma)$.

Temos também a seguinte aplicação $\phi : S_\gamma(g) \to S(\gamma)$ onde $\phi(S) = \frac{S}{2}$.

Lema:

Seja $S \in S_\gamma(g)$. Então $\phi(S) \in S(\gamma)$.

Lema:

A aplicação ϕ é sobrejetora se e só se $g \geq 2\gamma$.

Temos também a seguinte aplicação $\phi : S_\gamma(g) \to S(\gamma)$ onde $\phi(S) = \frac{S}{2}$.

Lema:

Seja $S \in S_\gamma(g)$. Então $\phi(S) \in S(\gamma)$.

Lema:

A aplicação ϕ é sobrejetora se e só se $g \geq 2\gamma$.

Um problema interessante é descrever a fibra $\phi^{-1}(T)$, para $T \in S(\gamma)$.

Usando a aplicação ϕ calcular $N_\gamma(g)$ passa a depender de calcular a fibra de cada $T \in S(\gamma)$ por ϕ como segue:

Usando a aplicação ϕ calcular $N_\gamma(g)$ passa a depender de calcular a fibra de cada $T \in S(\gamma)$ por ϕ como segue:

Observação

$$N_\gamma(g) = \sum_{T \in S(\gamma)} \#\phi^{-1}(T)$$

Usando a aplicação ϕ calcular $N_\gamma(g)$ passa a depender de calcular a fibra de cada $T \in S(\gamma)$ por ϕ como segue:

Observação

$$N_\gamma(g) = \sum_{T \in S(\gamma)} \#\phi^{-1}(T)$$

Por outro lado, se $T \in S(m, \gamma)$ então $2 \leq m \leq \gamma + 1$ e portanto podemos escrever:

$$S(\gamma) = \cup S(m, \gamma).$$

Utilizando a última decomposição, temos que

$$N_\gamma(g) = \sum_{m=2}^{\gamma+1} \sum_{T \in S(m,\gamma)} \#\phi^{-1}(T)$$

Utilizando a última decomposição, temos que

$$N_\gamma(g) = \sum_{m=2}^{\gamma+1} \sum_{T \in S(m,\gamma)} \#\phi^{-1}(T)$$

Teorema:

Seja $T = \langle m, 1 + me_1, ..., m-1+me_{m-1} \rangle \in S(m,\gamma)$. Então

$$\begin{aligned} S &\in \phi^{-1}(T) \quad \Leftrightarrow \\ S &= \langle 2m, 2me_1 + 2, ..., 2me_{m-1} + 2m - 2, 2mk_1 + 1, \\ &\quad ..., 2mk_{2m-1} + 2m - 1 \rangle \end{aligned}$$

onde $(k_1, k_3, ..., k_{2m-1}) \in \mathbb{N}_0^m$ satisfazem o sistema a seguir

$$
\left\{ \begin{array}{l} (I) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{2i-1} + e_j & \geq & x_{2(i+j)-1}, \text{se } i+j \leq m \\ x_{2i-1} + e_j + 1 & \geq & x_{2(i+j-m)-1}, \text{se } i+j > m \end{array} \right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.
$$

$$
\begin{cases}
(I) & \begin{cases} x_{2i-1} + e_j \geq x_{2(i+j)-1}, \text{se } i+j \leq m \\ x_{2i-1} + e_j + 1 \geq x_{2(i+j-m)-1}, \text{se } i+j > m \end{cases} \\[2ex]
(II) & \begin{cases} x_{2i-1} + x_{2j-1} \geq e_{i+j-1}, \text{se } i+j \leq m \\ x_{2i-1} + x_{2j-1} + 1 \geq e_{i+j-m-1}, \text{se } i+j \geq m+2 \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(I) & \begin{cases} x_{2i-1} + e_j \geq x_{2(i+j)-1}, \text{se } i+j \leq m \\ x_{2i-1} + e_j + 1 \geq x_{2(i+j-m)-1}, \text{se } i+j > m \end{cases} \\
(II) & \begin{cases} x_{2i-1} + x_{2j-1} \geq e_{i+j-1}, \text{se } i+j \leq m \\ x_{2i-1} + x_{2j-1} + 1 \geq e_{i+j-m-1}, \text{se } i+j \geq m+2 \end{cases} \\
\sum & x_{2i-1} = g - \gamma
\end{cases}
$$

MED-semigrupos e a conjectura (A)

Lembramos que S é MED-semigrupo se

$$e(S) = m(S).$$

Nesta parte vamos focar nesta família de semigrupos.

Lembramos que S é MED-semigrupo se

$$e(S) = m(S).$$

Nesta parte vamos focar nesta família de semigrupos.

Lema:

Seja S um semigrupo numérico com $m = m(S)$ e suponha que

$$Ap(S, m) = \{0, w(1), ..., w(m-1)\}.$$

Então S possui embedding dimension maximal se e só se

$$w(i) + w(j) > w(i + j) \text{ para cada } i, j.$$

Kaplan postulou um problema parecido com a conjectura de M. Bras-Amorós, só que para MED-semigrupos.

Kaplan postulou um problema parecido com a conjectura de M. Bras-Amorós, só que para MED-semigrupos.

Conjectura (A3)

Para $m \geq 2$ e $g \geq 2$

$$MED(m, g) \leq MED(m, g + 1),$$

onde $MED(m, g) = \# \mathscr{MED}(m, g)$.

Teorema

Existe uma correspondência um a um entre o conjunto de semigrupos numéricos com multiplicidade m e número de Frobenius f, e o conjunto de MED-semigrupos com número de Frobenius $f+m$, multiplicidade m e o restante de geradores minimais maior que $2m$.

Proposição:

Seja S um semigrupo numérico com $m = m(S)$. São equivalentes:

1. $e(S) = m(S)$;
2. $\forall x, y \in S^*$ então $x + y - m \in S$;
3. $-m + S^*$ é um semigrupo numérico.

Proposição:

Seja S um semigrupo numérico com $m = m(S)$. São equivalentes:

1. $e(S) = m(S)$;
2. $\forall x, y \in S^*$ então $x + y - m \in S$;
3. $-m + S^*$ é um semigrupo numérico.

Em particular, todo Arf semigrupo tem embedding dimension maximal. De fato, se S é Arf, então $x + y - z \in S$ para cada $z \leq x \leq y$, com $x, y, z \in S$.

Alguns outros resultados:

Teorema

Seja $k \geq 0$ e $m \geq 2k + 2$. Então

$$MED(2k + 2, 3k + 2) = MED(m, m + k).$$

Alguns outros resultados:

Teorema

Seja $k \geq 0$ e $m \geq 2k+2$. Então

$$MED(2k+2, 3k+2) = MED(m, m+k).$$

Proposição:

Para $k \geq 0$ $N(k+1) = MED(2k+2, 3k+2)$.

Conjectura de Wilf

(B)

Seja S um semigrupo numérico. A Wilf conjecturou que

$$C(S) \leq e(S)n(S),$$

onde $n(S) = \sharp\{s \in S |\ s < F(S)\}$.

Alguns casos já provados desta conjectura:

1. Se $e(S) = 2$ ou 3;

(B)

Seja S um semigrupo numérico. A Wilf conjecturou que

$$C(S) \leq e(S)n(S),$$

onde $n(S) = \sharp\{s \in S |\ s < F(S)\}$.

Alguns casos já provados desta conjectura:

1. Se $e(S) = 2$ ou 3;
2. Se $2g < 3m$ ou $f < 2m$ (Kaplan);

(B)

Seja S um semigrupo numérico. A Wilf conjecturou que

$$C(S) \leq e(S)n(S),$$

onde $n(S) = \sharp\{s \in S|\ s < F(S)\}$.

Alguns casos já provados desta conjectura:

1. Se $e(S) = 2$ ou 3;
2. Se $2g < 3m$ ou $f < 2m$ (Kaplan);
3. $e(S) = m(S) - 1$ ou $m(S)$;

Conjectura de Wilf

(B)

Seja S um semigrupo numérico. A Wilf conjecturou que

$$C(S) \leq e(S)n(S),$$

onde $n(S) = \sharp\{s \in S|\ s < F(S)\}$.

Alguns casos já provados desta conjectura:

1. Se $e(S) = 2$ ou 3;
2. Se $2g < 3m$ ou $f < 2m$ (Kaplan);
3. $e(S) = m(S) - 1$ ou $m(S)$;
4. S simétrico ou quase-simétrico;

(B)

Seja S um semigrupo numérico. A Wilf conjecturou que

$$C(S) \leq e(S)n(S),$$

onde $n(S) = \sharp\{s \in S|\ s < F(S)\}$.

Alguns casos já provados desta conjectura:

1. Se $e(S) = 2$ ou 3;
2. Se $2g < 3m$ ou $f < 2m$ (Kaplan);
3. $e(S) = m(S) - 1$ ou $m(S)$;
4. S simétrico ou quase-simétrico;
5. $F + 1 - g \leq 4$ ou $g \leq \frac{3(F+1)}{4}$ (Dobbs, Matthews).

Referências Bibliográficas

- N. Kaplan, Counting numerical semigroups, Amer. Math. Monthly 163 (2017), 375-384.
- J.C. Rosales and P. A. García-Sánchez, Numerical semigroups, Springer, 2009.
- M. Bernardini and F. Torres, Counting numerical semigroups by genus and even gaps, Disc. Math., 340 (2017), 2853-2863.

M. Branco, J. García-García, P.A. García-Sánchez, J.C. Rosales, Systems of inequalities and numerical semigroups, J. Lond. Math. Soc. 65 (2) (2002) 611–623.

D. Dobbs, G. Matthews, On a question of Wilf concerning numerical semigroups, in: Focus on Commutative Rings Research, Nova Sci. Publ., New York, 2006, pp. 193–202.

Bernardini, Matheus. (2019). Counting numerical semigroups by genus and even gaps via Kunz-coordinate vectors.

N. Kaplan, Counting numerical semigroups by genus and some cases of a question of Wilf, Journal of Pure and Applied Algebra 216 (2012), no. 5, 1016 – 1032

Obrigado pela atenção!