Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Instituto de Matemática e Computação Científica – IMECC
Matemática - Licenciatura

Ana Cláudia Piau Candido - 154615
Carla Cristina Zauli Pereira - 154954
Bárbara de Souza Pinto Silva -157709
Janaína Gouvêa Ishida - 97483
Maria Carolina Ramalho - 156576
Otávio de Nadae- 156899
Patrícia Cristina Vitor - 108355
Rafael Ferezini- 157053
Viviane Silva Freire - 160036

Números Complexos

Campinas-SP
Abril/2014

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os matemáticos sempre tiveram uma paixão incalculável de explicar fenômenos. Por necessidades práticas, surgiram estudos que envolviam a resolução de equações de grau igual ou superior a três.

Historicamente, os números complexos começaram a ser estudados graças à grande contribuição do matemático GirolamoCardano (1501-1576). Esse matemático mostrou que mesmo tendo um termo negativo em uma raiz quadrada era possível obter uma solução para a equação do segundo grau: $x^2 – 10x +40 = 0$. Essa contribuição foi de grande importância, pois até então os matemáticos não acreditavam ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. A partir dos estudos de GirolamoCardano, outros matemáticos estudaram sobre esse impasse na matemática, obtendo uma formalização rigorosa com Friedrich Gauss (1777-1855).

E depois de vários estudos para a resolução dessas equações que surgiram os números complexos e toda a teoria matemática baseada neles. A intenção de resolver equações que envolvessem raízes quadradas de números negativos é que, em algum momento, notou-se que somente os números reais não eram suficientes, e, portanto, precisava-se de algo a mais.

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

2. OBJETIVOS

Definir o que são os números complexos. Definir quais são as operações que podem ser realizadas com eles, além das propriedades para realizar estas operações. Mostrar e explicar as duas principais formas de representação destes números (forma retangular e forma trigonométrica). Descobrir qual a relação entre os números complexos e as funções logarítmicas. Entender a utilidade desses números através de algumas aplicações.

3. DESENVOLVIMENTO

DEFINIÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO

Um número complexo é um número que pode ser escrito na forma:

$$z = x + yi$$

Por definição, a letra x é chamada de parte real e o y de parte imaginária. O conjunto dos números que formam a parte real é representado por Re(z). O conjunto dos números que formam a parte imaginária é representado por Im (z).

Por exemplo, o número z = -5 + 10i possui Re(z) = -5 e Im(z) = 10.·.

A letra i que acompanha o valor tomado por y é o que denota a chamada Unidade Imaginária. A principal propriedade dessa Unidade é que seu quadrado se iguala a -1:

$$i^2 = -1$$

O conjunto, conhecido como o conjunto dos complexos, é o que engloba todos os números que seguem a forma de z proposta à cima.

Ao número complexo, entretanto, se pode atribuir um número real positivo, muitas vezes se referido como “módulo”, uma norma pertencente ao espaço vetorial. Esse módulo pode ser calculado ao se achar a raiz quadrada da soma dos quadrados de x e y que constituem z:

$$||z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

OPERAÇÕES

Dentro do Conjunto dos Complexos, assim como outros conjuntos, se existe a possibilidade de realizar as operações de adição e multiplicação, entre outras. Ao se levar em conta a definição de número complexo e as propriedades distributiva, associativa e comutativa, pode-se definir as seguintes operações elementares:

$$1.Identidade: \ \ Se\ z=(a,b)\ e\ w=(c,d),\ entao\ z=w \Leftrightarrow a=c\ e\ b=d$$
$$2.Soma: \ \ z+w=w+z=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$3.Produto: \ \ zw=wz=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$
$$4.Conjugado: \ \ \bar{z}=a-bi$$
$$5.Inverso\ multiplicativo: \ \ \frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{\bar{z}}{||z||^2}$$

PROPRIEDADES DO MÓDULO

O módulo de um número complexo deve obedecer às seguintes propriedades:

- $||z||=\sqrt{x^2+y^2}$
- $||z.w||=||z||.||w||$
- $||z||=0 \Leftrightarrow z=0$

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS

- O conjugado do conjugado de z é ele mesmo

O conjugado de $z=a+bi$ é$\bar{z}=a-bi$.

O conjugado de $\bar{z}=a-bi$ será $z=a+bi$, ou seja, z.

- A parte real de z é a soma de z com seu conjugado dividido por dois.

$$Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{(a+bi)+(a-bi)}{2}=\frac{2a}{2}=a$$

- A parte imaginária de z é o resultado da subtração $z-\bar{z}$, dividida pelo número 2i.

$$Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i}=\frac{2bi}{2i}=b$$

- O produto de z por seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z

$$z.\bar{z}=(a+bi).(a-bi)=a^2+b^2=||z||^2$$

- O quadrado de z em módulo é igual ao modulo do quadrado de z.

$$\left\|z^2\right\| = \|z\|^2$$

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Existem diversas formas de se representar os números complexos, sendo as mais utilizadas a forma retangular (forma cartesiana) e a forma trigonométrica (forma polar).

- Forma retangular: essa forma de representar um número complexo é mais prática e mais utilizada nos cálculos.

O número Z é representado como Z = x + yi, em que Z é um número complexo qualquer, x é a parte real do número complexo Z e y é a parte imaginária do número complexo Z.

- Forma trigonométrica: esse meio de representação é definido através do módulo e do argumento do número complexo.

Nessa forma, o número complexo Z é representado como:

$$Z = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Por causa de suas grandes diferenças entre os outros conjuntos, esses números possuem sua própria representação geométrica, onde no eixo horizontal se representa a parte real do número e o eixo vertical é responsável pela parte imaginária. Essa representação é chamada de Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss.Em que |Z| é a distância do ponto Z = (x,y) à origem do sistema de coordenadas, enquanto o θ é o ângulo entre a semirreta OZ e o semi-eixo real, chamado de argumento de Z e também denotado por arg(Z).

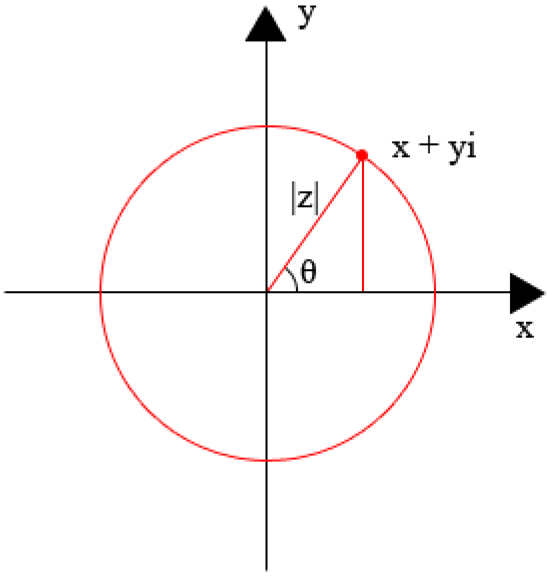

Figura 1. Plano de Argand-Guass

O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos apareceram como uma extensão dos números reais. Onde: R representa o conjunto dos números reais. C representa o conjunto dos números complexos.

C = {z = a+ bi: a, b∈ R e i^2 = -1}

O conjunto dos números complexos como extensão algébrica

No campo da álgebra abstrata, o número i pode ser interpretado como o elemento que gera a extensão algébrica dos números reais contendo a raiz do polinômio:

$$x^2 + 1$$

Isto é, o corpo é isomorfo (possui a mesma forma) ao corpo quociente:

$$\mathbb{R}/(x^2 + 1)$$

Pela aplicação:

$$\Phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}/(x^2 + 1)$$

Por meio do homomorfismo de anéis tal que restrito aos reais é a aplicação identidade e que leva i em:

$$\Phi(i) = x$$

LOGARÍTMOS

Função logarítmica natural

Definimos a função logarítmica natural de uma variável complexa z pela equação:

$$ln(z) = ln(||z||) + i(\theta \pm 2k\pi), \ k\epsilon\mathbb{N}$$

A função $ln(z)$ é multivalente com infinitos valores - mesmo para números reais. Chamamos de valor principal de $ln(z)$ o número definido por:

$$ln(z) = ln(||z||) + i\theta$$

Função logarítmica decimal

Em termos de logaritmos decimais, podemos definir a função logarítmica anterior como:

$$log(z) = log(||z||) + ilog(e) + (\theta \pm 2k\pi)$$

Essa função também é multivalente e têm seu valor principal quando:

$$k = 0$$

APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos, além de possuírem grande aplicação na área da Matemática em que são estudadas análise complexa, álgebra linear complexa, álgebra de Lie complexa, com aplicações em resolução de equações algébricas e equações diferenciais, tem utilidade em várias áreas, tais como engenharia (elétrica e de controle), eletromagnetismo, física quântica, e teoria do caos.

Na Engenharia de Controle, em um sistema de controle da quantidade de água e da taxa de saída. Existe uma válvula que controla tal taxa de entrada da água num tanque e existe uma evasão para outro tanque. Então, para controlar a quantidade de água de cada tanque existe uma forma matemática que faz este controle, abrindo e fechando as válvulas através de um sistema elétrico. Graficamente temos duas opções possíveis, que são determinadas a partir do funcionamento da função modelo.

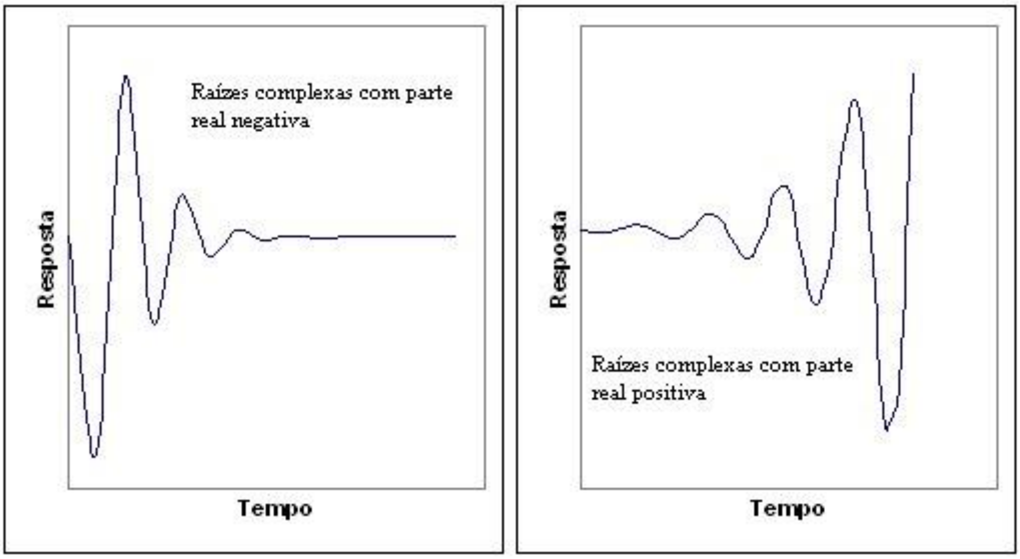

Figura 2. Gráficos da quantidade de água e a taxa de saída

Se tivermos o número complexo de forma que a parte real seja negativa, isso indica que com o aumentar do tempo a resposta da função vai se estabilizando, convergindo para um valor definido. Se a parte real for positiva, com o aumentar do tempo a resposta da função oscila e diverge. Este modelo ainda pode ser aplicado no controle de temperaturas de tanques, fornos, ou seja, tudo que envolva um sistema de 2ª ordem terá a utilização dos números complexos.

Temos ainda a aplicação na Engenharia Elétrica (CHAVES. S. M) na parte de circuitos elétricos, e isso se deve ao cientista Hermann Von Helmholtz (1821-1824) que aplicou primeiramente os números complexos à teoria de circuitos elétricos. A partir de então vários estudiosos desenvolveram aplicações mais complexas. Arthur Edwin, em 1823, admitiu o termo Impedância e os números complexos para os componentes dos circuitos elétricos de corrente alternada. Desde então, os números complexos passaram a ser fundamentais no desenvolvimento da Engenharia Elétrica, enquanto ramo cientifico (IGM, 2010).

Temos em circuitos elétricos de corrente alternada, como por exemplo, as instalações elétricas residências, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, porque estes facilitam muito os cálculos. A relação U = Ri, estudada na Física do ensino médio e que se utiliza dos números reais, torna-se U = Zi, em que U é a tensão (diferença de potencial ou voltagem), Z é a impedância (resistência) e i é a corrente elétrica (variação de cargas elétricas ao longo do tempo), sendo essas grandezas representadas através de números complexos. Para que não houvesse confusão entre i, símbolo da corrente elétrica, e i, unidade imaginária, os engenheiros acordaram usar a letra j como representação da unidade imaginária na expressão algébrica do complexo a + bj. Além disso, modificaram a notação para a forma trigonométrica do número complexo w.

As correntes elétricas, tensões e reatâncias podem ser representadas vetorialmente, sendo que no circuito indutivo o vetor tensão está defasado do vetor corrente, e no circuito capacitivo o vetor corrente está adiantado do vetor tensão. Todos estes vetores estão girando no sentido anti-horário, na representação cartesiana, e são então chamados de fasores. E a outra aplicação é nos condutores.

Portanto a impedância de um circuito pode ser representada por: Z=R+jX, onde o sinal que antecede o j pode ser positivo ou negativo e X pode ser indutivo (XL) ou capacitivo (XC).

4. CONCLUSÃO

Foi possível compreender o que são os números complexos e como realizar operações com eles. Além disso, as propriedades que foram citadas e explicadas são de extrema importância para a realização dessas operações. As duas principais maneiras de representação destes números (forma retangular e forma trigonométrica) são fundamentais para diferentes tipos de aplicações. Os números complexos são de extrema importância para a representação das funções logarítmicas. Por fim, existem diversas áreas que utilizam os números complexos para estudos.

Portanto, é fundamental entender o funcionamento dos números complexos devido à ampla aplicação que eles possuem.

REFERÊNCIAS

Brasil Escola. **Forma Algébrica**. Disponível em <http://www.brasilescola.com/matematica/forma-algebrica.htm> Acesso em 07 jul. 2014

Brasil Escola. **Números Complexos**. Disponível em <http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-complexos.htm> Acesso em 04 jul. 2014

CHAVES, M. S. **Números complexos: História, Teoria e Prática**. Disponível em <http://www.eumed.net/libros-gratis/2013a/1317/referencias.html> Acesso em 01 jul. 2014

Eves, H. **Introdução à História da Matemática**. Disponível em <5ª ed. Campinas-SP, Editora da Unicamp, 2011> Consultado em 04 jul. 2014

IGM. **Aplicações de Números Complexos na Engenharia Elétrica**. Disponível em <http://www.igm.mat.br> Acesso em 01 jul. 2014

Matemática. **Aplicação dos Números Complexos**. Disponível em <http://vivaamateticaif.blogspot.com.br/2012/12/aplicacao-dos-numeros-complexos-muitos.html> Acesso em 01 jul. 2014

Só Matemática. **Nicolo Fontana – Tartaglia**. Disponível em <http://www.somatematica.com.br/biograf/tartaglia.php> Acesso em 07 jul. 2014