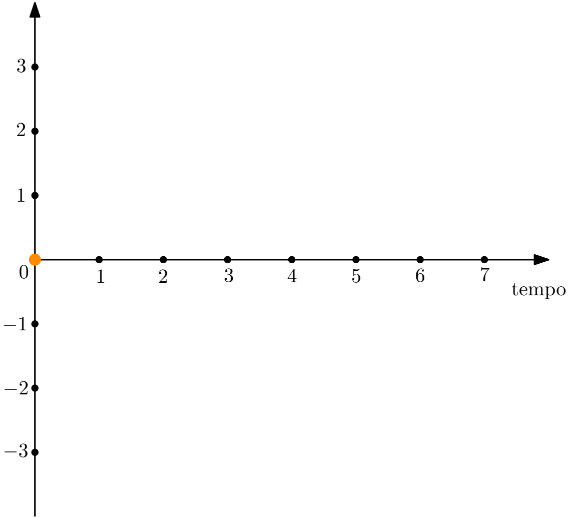
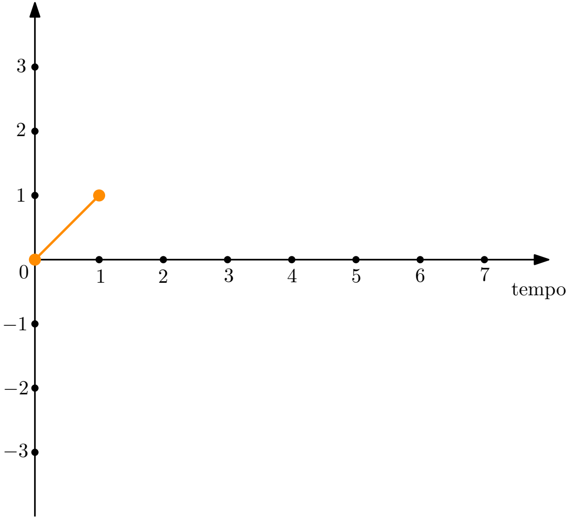
A matemática de lançamentos de moeda

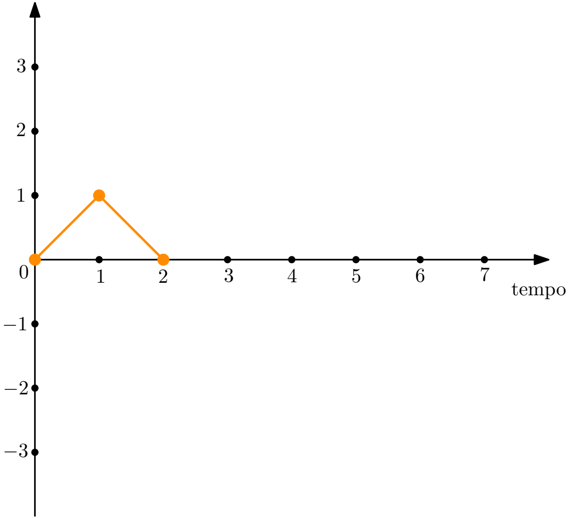
Serguei Popov

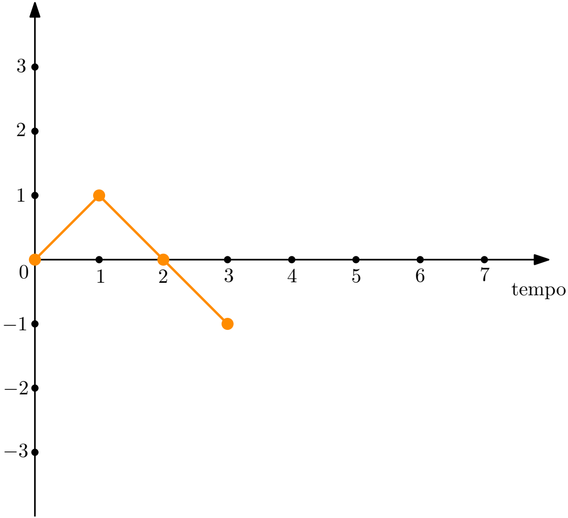
Departamento de Estatística, IMECC-UNICAMP
www.ime.unicamp.br/∼popov

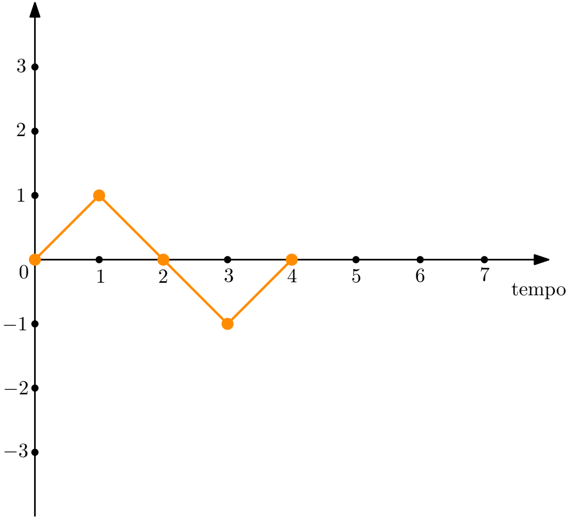
- modelo matemático: passeio aleatório simples unidimensional
- moeda honesta = as probabilidades de sair cara/coroa são iguais
- jogamos uma moeda honesta sucessivamente
- cara = um passo para cima
- coroa = um passo para baixo

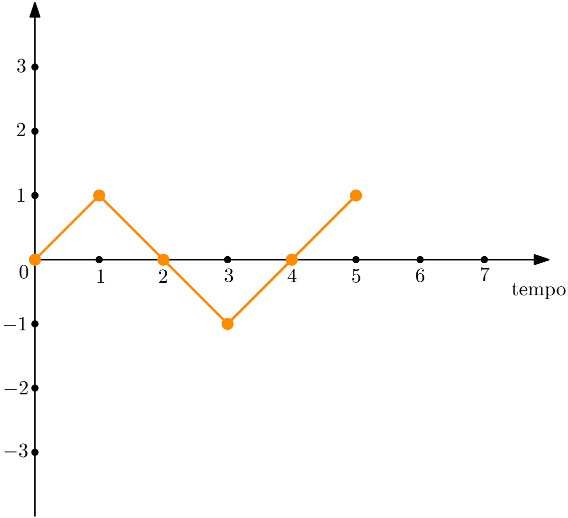

3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
tempo
−1
−2
−3

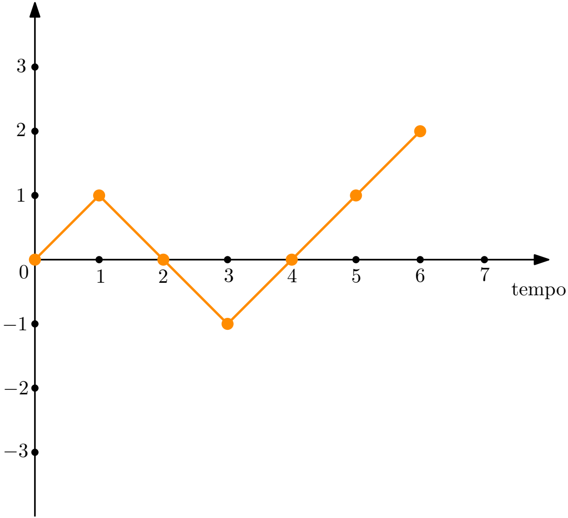

3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
tempo
−1
−2
−3

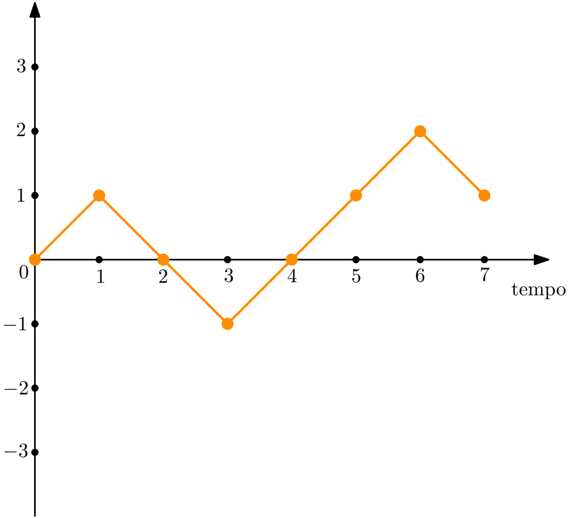

3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
tempo
−1
−2
−3


3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
tempo
−1
−2
−3

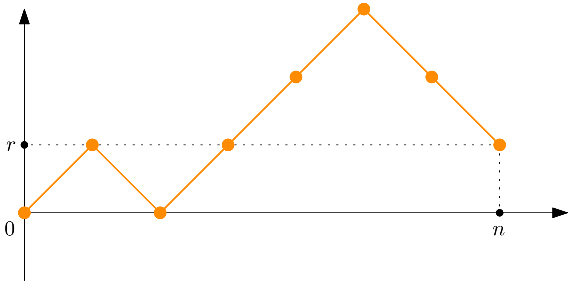

3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
tempo
−1
−2
−3


3
2
1
0
−1
−2
−3
1
2
3
4
5
6
7
tempo


3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
tempo
−1
−2
−3


3
2
1
0
−1
−2
−3
1
2
3
4
5
6
7
tempo

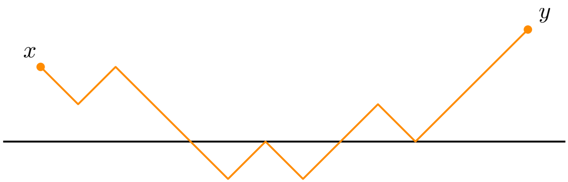
- até o tempo n, no total, há 2^n caminhos (começando na origem)
- seja $N(n, r)$ a quantidade de caminhos que terminam no ponto (n, r)
- como calcular $N(n, r)$?



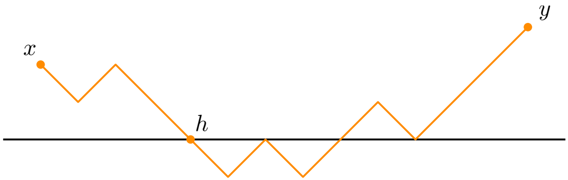
- $n + r$ tem que ser par (se $n + r$ for ímpar, $N(n, r) := 0$)
- se $a =$ número de passos para cima, $b =$ número de passos para baixo, então $n = a + b$, $r = a - b$
- logo,

$$N(n, r) = \binom{a+b}{a} = \binom{n}{\frac{n+r}{2}}$$

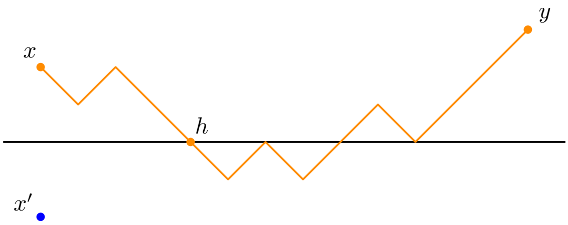
Princípio de reflexão: como contar o número de caminhos de *x* até *y*, que tem (pelo menos) um ponto em comum com a linha reta?



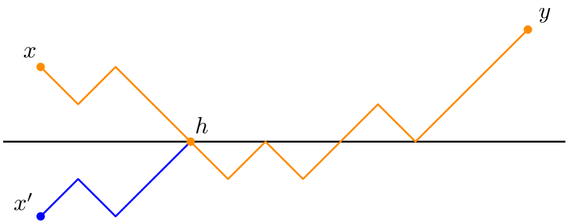
Princípio de reflexão: como contar o número de caminhos de x até y, que tem (pelo menos) um ponto em comum com a linha reta?



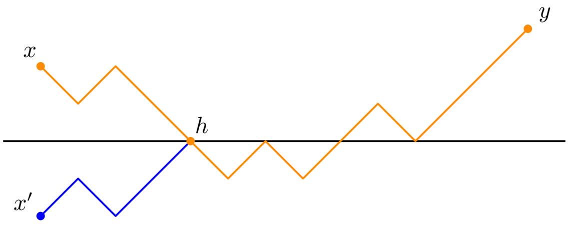
Princípio de reflexão: como contar o número de caminhos de x até y, que tem (pelo menos) um ponto em comum com a linha reta?



Princípio de reflexão: como contar o número de caminhos de *x* até *y*, que tem (pelo menos) um ponto em comum com a linha reta?



Princípio de reflexão: como contar o número de caminhos de *x* até *y*, que tem (pelo menos) um ponto em comum com a linha reta?



Resultado:
o número de caminhos de x até y com a propriedade desejada = o número *total* de caminhos de x' até y

- notação: S_n é a posição do passeio aleatório no tempo n
- $\frac{1}{2^n}$ = probabilidade de cada caminho *fixo* de comprimento n
- logo, se $n + r$ é par,

$$p_{n,r} := \mathbb{P}[S_n = r] = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n}$$

- seja $u_{2n} := p_{2n,0} = \mathbb{P}[S_{2n} = 0]$ = probabilidade de estar na origem no momento $2n$
- então, $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$

Como u_{2n} se comporta quando $n \to \infty$? Vamos usar a *fórmula de Stirling*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Logo,

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n})^2 \cdot 2^{2n}}$$

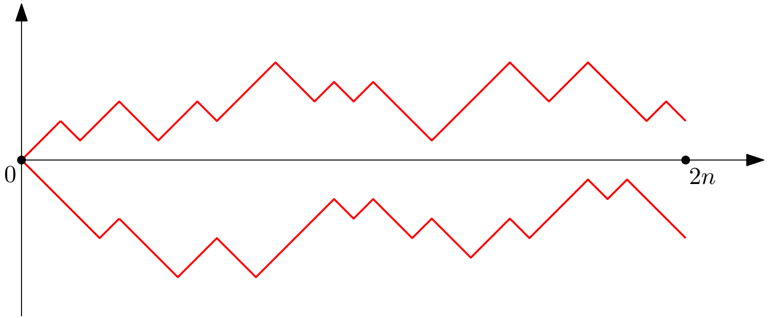
Simplificando, obtemos

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \tag{1}$$

Lema

Para qualquer $n \geq 1$

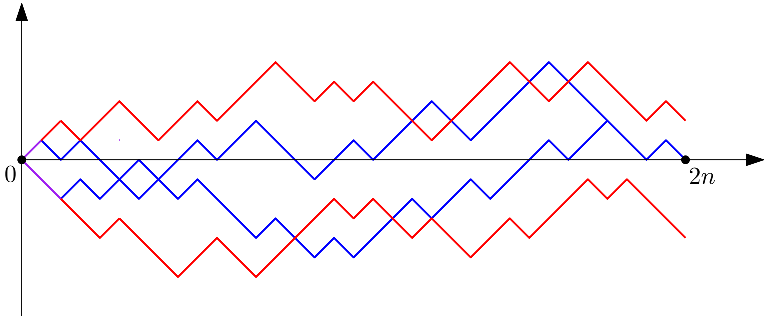
$$\mathbb{P}[S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0] = \mathbb{P}[S_{2n} = 0] = u_{2n}$$



Lema

Para qualquer $n \geq 1$

$$\mathbb{P}[S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0] = \mathbb{P}[S_{2n} = 0] = u_{2n}$$



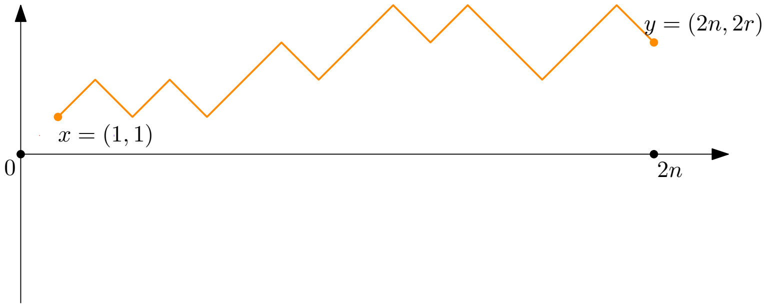
Demonstração do lema:

Temos

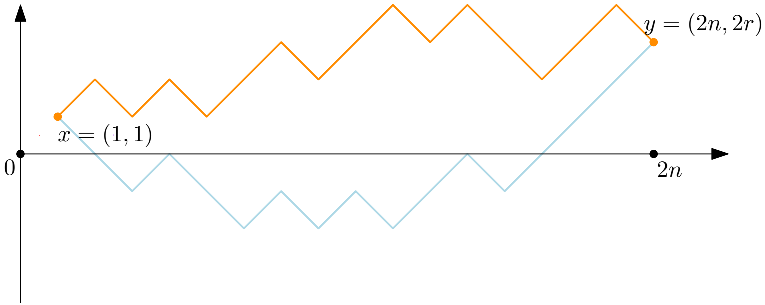
$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0] = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r]$$

(os termos correspospondentes a $r > n$ são todos iguais a zero).

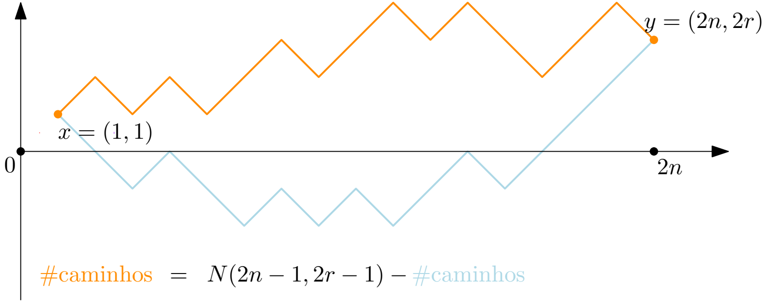
$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r] = 2^{-2n} \cdot \#\text{caminhos}$$



$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r] = 2^{-2n} \cdot \#\text{caminhos}$$

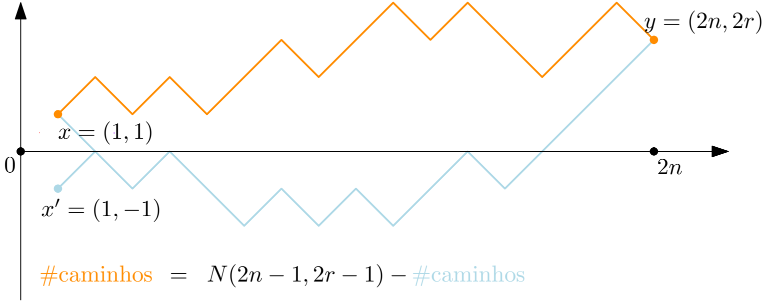


$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r] = 2^{-2n} \cdot \#\text{caminhos}$$



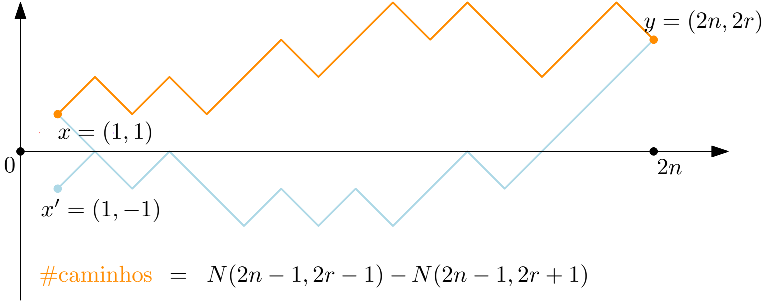
$$\#\text{caminhos} = N(2n-1, 2r-1) - \#\text{caminhos}$$

$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r] = 2^{-2n} \cdot \#\text{caminhos}$$



$$\#\text{caminhos} = N(2n-1, 2r-1) - \#\text{caminhos}$$

$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r] = 2^{-2n} \cdot \#\text{caminhos}$$



$$\#\text{caminhos} = N(2n-1, 2r-1) - N(2n-1, 2r+1)$$

Então,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r]\\&= 2^{-2n}(N(2n-1, 2r-1) - N(2n-1, 2r+1))\\&= \frac{1}{2}(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}),\end{aligned}$$

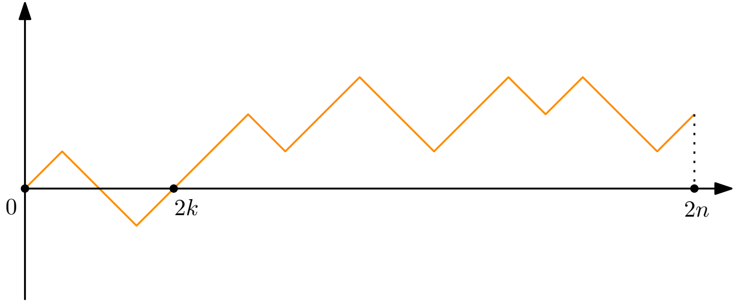
logo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0] &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1})\\&= \frac{1}{2}p_{2n-1,1} = \frac{1}{2}u_{2n}\end{aligned}$$

(exercício: verifique $\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$) $\square$

Último empate:

- seja $k = \max\{j \leq n : S_{2j} = 0\}$
- $2k$ é o momento quando ocorre *o último empate*



Teorema (a lei de arco-seno para o último empate)

Seja $\alpha_{2k,2n}$ a probabilidade que o último empate até o tempo $2n$ ocorra no momento $2k$. Então

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{2}$$

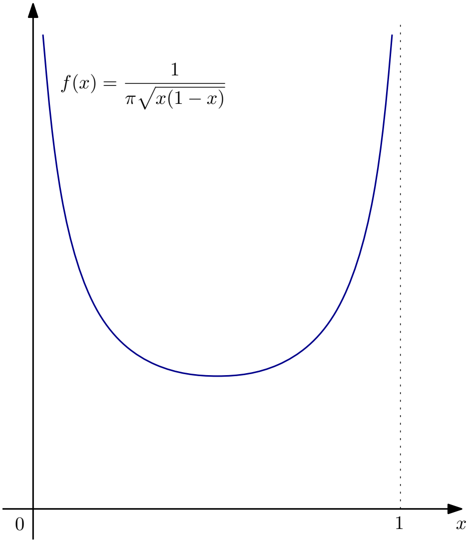
Demonstração:

- queremos contar caminhos tais que $S_{2k} = 0$, $S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0$
- a primeira parte (até $2k$) podemos escolher de $2^{2k} u_{2k}$ maneiras diferentes
- pelo Lema, a parte restante pode ser escolhida de $2^{2n-2k} u_{2n-2k}$ maneiras diferentes
- dividimos por 2^{2n}, obtendo a probabilidade desejada.

Porque “arco-seno”?

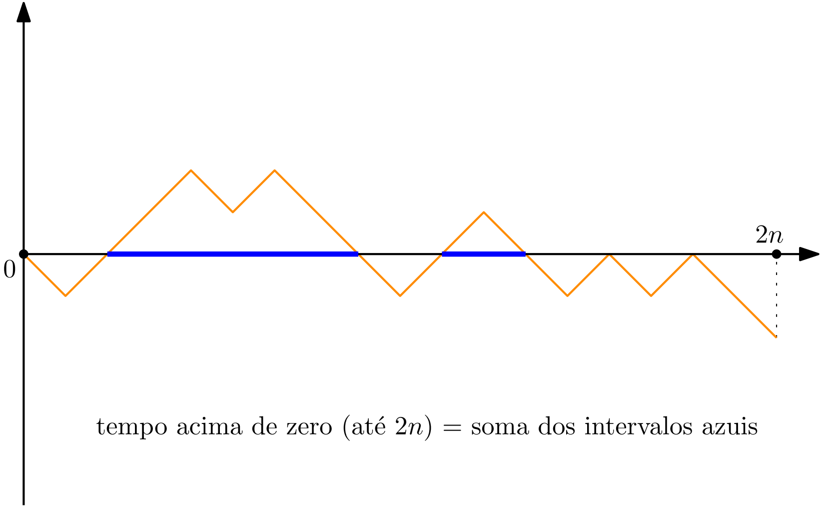
- denote $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, $0 < x < 1$
- então, por causa de (1) e (2), temos $\alpha_{2k,2n} \approx \frac{1}{n} f(k/n)$
- logo, pode-se mostrar que para $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\text{último empate antes de } 2xn] &= \sum_{k<xn} \alpha_{2k,2n} \\ &\approx \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}.\end{aligned}$$


$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$
0
1
x

Exemplo:

- lançamos moeda uma vez por segundo, durante um ano (ou seja, $2n = 31\,536\,000$)
- $\mathbb{P}$[último empate nos primeiros 9 dias] $\approx 0{,}1$
- $\mathbb{P}$[último empate nos primeiros 2 dias e 6 horas] $\approx 0{,}05$
- $\mathbb{P}$[último empate em 2 horas e 10 minutos] $\approx 0{,}01$



tempo acima de zero (até $2n$) $=$ soma dos intervalos azuis

Teorema (a lei de arco-seno para o tempo acima de zero)

A probabilidade que, até o momento $2n$, a trajetória fica $2k$ instantes acima de zero, é $\alpha_{2k,2n}$. Ou seja, o tempo acima de zero tem a mesma distribuição que o último empate.

Por exemplo, se a moeda é lançada uma vez por segundo durante um ano,

- com probabilidade $0{,}1$ um dos jogadores vai liderar durante menos que 4 dias e meio
- com probabilidade $0{,}01$ um dos jogadores vai liderar por, no máximo, 1 hora e 5 minutos.

Já que é uma palestra de divulgação…

Pós-graduação em Estatística, IMECC/UNICAMP
www.ime.unicamp.br/posgrad/, clicar em Estatística

Obrigado pela atenção!