

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211 Tópico 8. “Integração numérica”

Exercício 1.

Considere a seguinte integral:

$$\int_1^2 \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

- (a) Aproxime numericamente o valor desta integral utilizando a regra de Simpson repetida com 2 subintervalos.
- (b) Estime o valor desta integral usando quadratura gaussiana com dois pontos.
- (c) Considerando que o erro cometido na aproximação da integral por quadratura gaussiana é dado por $E_{QG} = \frac{(b-a)^3 2^4}{3(4!)^3} f^{(iv)}(\xi)$, para algum $\xi \in (a, b)$, qual das duas aproximações obtidas em (a) e (b) garante o menor erro em módulo?

Solução

Item (a).

Utilizando a regra de Simpson repetida com 2 subintervalos, temos:

$$\int_1^2 f(x) dx \approx \frac{1}{12} [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)],$$

Neste caso, temos $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$. Substituindo os valores na relação acima, obtemos

$$\int_1^2 \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx 0.6322.$$

Item (b).

Fazendo a mudança de variável $x = \phi(t) = \frac{1}{2}(3+t)$, temos $\phi'(t) = \frac{1}{2}$, $\phi(-1) = 1$ e $\phi(1) = 2$.

Assim,

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \frac{(3+t)^2}{\exp\left(\frac{3+t}{2}\right) - 1} dt.$$

Assim,

$$\frac{1}{8} \int_{-1}^1 \frac{(3+t)^2}{\exp\left(\frac{3+t}{2}\right) - 1} dt \approx \frac{1}{8} \left[\frac{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\exp\left(\frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\right) - 1} + \frac{\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\exp\left(\frac{3 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\right) - 1} \right] \approx 0.6323.$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx 0.6323.$$

Item (c).

Sabemos que $b = 2$, $a = 1$, $h = 0.25$ e que $f(x) \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$. Assim,

$$|E_{QG}| \leq \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(iv)}(x)| \frac{1 \cdot 2^4}{3 \cdot 4!} \quad \text{e} \quad |E_{SR}| \leq \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(iv)}(x)| \frac{0.25^4}{180},$$

Denotando $\max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(iv)}(x)| \equiv r$ e efetuando os cálculos, temos

$$|E_{QG}| \leq 3,8580 \times 10^{-4} r \quad \text{e} \quad |E_{SR}| \leq 2,1701 \times 10^{-5} r,$$

assim, concluimos que a melhor escolha é a da Regra de Simpson Composta.

Exercício 2.

A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função $F(t) = 8e^{-t} \frac{I(a)}{\pi}$ para $t \geq a$, em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x, a) dx \text{ com } f(x, a) = \frac{e^{ax}}{x}.$$

Calcule $I(1)$ usando a fórmula composta do Trapézio com erro de truncamento inferior a 0.05.

Solução

Substituindo a por 1, temos:

$$I(1) = \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$$

O erro de truncamento da fórmula composta do Trapézio é dado por:

$$E_T = \left| -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta) \right|, \quad \eta \in [a, b].$$

Derivando a função inicial $f(x) = \frac{e^x}{x}$ para obter a segunda derivada, temos

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{x^2}e^x \quad f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)}{x^3}e^x.$$

É necessário encontrar o majorante desta função no intervalo $[1, 2]$, assim observamos que a função $f''(x)$ atinge seu valor máximo em $x = 1$, com o valor $f''(1) = 2.718282$. Assim:

$$\left| -\frac{h^2}{12}(2-1) \cdot 2.718282 \right| < 0.05 \Leftrightarrow h < 0.469817.$$

mas,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n},$$

então,

$$\frac{1}{n} = h < 0.469817 \Leftrightarrow n > 2.128490, \text{ logo } n = 3.$$

Portanto, com 3 intervalos temos $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{3} = 0.333333$. Por uma questão de comodidade nos cálculos, utilizamos $n = 4$ e $h = 0.25$.

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	2.718282	2.792274	2.987793	3.288344	3.694528

Utilizando a fórmula composta do Trapézio, com $h = 0.25$, temos:

$$\int_1^2 f(x) dx \approx T(0.25) = \frac{0.25}{2}[2.718282 + 2 \cdot 2.792274 + 2 \cdot 2.987793 + 2 \cdot 3.288344 + 3.694528] = 3.068704.$$

Portanto, o valor do integral é $I(1) \approx 3.068704$.

Exercício 3.

Um carro de corrida demora 79 segundos a percorrer uma pista. A velocidade do carro (em m/seg) é determinada através de um radar e é apresentada desde o início da volta na seguinte tabela

Tempo	0	0.5	1	1.5	48	48.5	49	59	69	79
Velocidade	62	74	73.5	60.5	49.5	42.5	39	44.5	58	61.5

Qual o comprimento da pista?

Solução

Fazendo a mudança de variável: $t \rightarrow x$.

O comprimento c da pista é dado pelo integral da velocidade $v(t)$:

$$c = \int_0^{79} v(t) dt.$$

Os pontos são agrupados de acordo com os diferentes espaçamentos entre eles, assim:

$$\int_0^{79} v(t) dt = \int_0^{1.5} v(t) dt + \int_{1.5}^{48} v(t) dt + \int_{48}^{49} v(t) dt + \int_{49}^{79} v(t) dt.$$

Cada um destes grupos é associado a uma forma composta de integração, de acordo com o número n de subintervalos.

- $[0, 1.5]$: $\int_0^{1.5} v(t) dt$ (3 subintervalos, $h = 0.5$) $\Rightarrow$ fórmula simples dos Três Oitavos:

$$\int_0^{1.5} v(t) dt \approx \frac{3 \cdot 0.5}{8} [62 + 3 \cdot 74 + 3 \cdot 73.5 + 60.5] = 105.9375.$$

- $[1.5, 48]$: $\int_{1.5}^{48} v(t) dt$ (1 subintervalo, $h = 46.5$) $\Rightarrow$ fórmula simples do Trapézio:

$$\int_{1.5}^{48} v(t) dt \approx \frac{46.5}{2} [60.5 + 49.5] = 2557.5.$$

- $[48, 49]$: $\int_{48}^{49} v(t) dt$ (2 subintervalos com $h = 0.5$) $\Rightarrow$ fórmula simples de Simpson:

$$\int_{48}^{49} v(t) dt \approx \frac{0.5}{3} [49.5 + 4 \cdot 42.5 + 39] = 43.083333.$$

- $[49, 79]$: $\int_{49}^{79} v(t) dt$ (3 subintervalos com $h = 10$) $\Rightarrow$ fórmula simples dos Três Oitavos:

$$\int_{49}^{79} v(t) dt \approx \frac{3 \cdot 10}{8} [39 + 3 \cdot 44.5 + 3 \cdot 58 + 61.5] = 1530.$$

A resultante destas aproximações é igual a:

$$\int_0^{79} v(t) dt = 105.9375 + 2557.5 + 43.083333 + 1530 = 4236.520833.$$

Assim, o comprimento da pista é de aproximadamente 4236.5208 metros.

Exercício 4.

Suponha que na construção de um templo egípcio com 150 m de altura foram necessários muitos anos, durante os quais cada operário realizou 1.742×10^6 kgm de quantidade de trabalho. Sabe-se que a seção transversal horizontal do edifício, à altura x , é um quadrado cuja área é dada por $A(x) = \frac{9}{4}(200 - x)^2$.

Através da fórmula que dá a quantidade total de trabalho realizado

$$T = \rho \int_a^b xA(x) dx,$$

em que $\rho = 2014$ kg/m³, representa a densidade da rocha, calcule:

- (a) T , usando separadamente duas fórmulas compostas de integração, com base em 5 pontos;
- (b) os erros de truncamento cometidos no item anterior e comente os resultados;
- (c) o número de operários utilizados na construção do templo.

Solução

Item (a).

A função a integrar é dada por: $T = 2014 \int_0^{150} \underbrace{xA(x)}_{f(x)} dx$.

Utilizando 5 pontos, ou seja 4 intervalos, temos $h = \frac{b-a}{n} = 37.5$, assim:

x	0	37.5	75	112.5	150
$A(x)$	90000	59414.0625	35156.25	17226.5625	5625
$f(x)$	0	2228027.344	2636718.75	1937988.281	843750

Utilizamos a fórmula composta de Simpson, com $h = 37.5$. Logo:

$$\int_0^{150} f(x) dx \approx S(37.5) = 37.53[0 + 4 \cdot 2228027.344 + 2 \cdot 2636718.75 + 4 \cdot 1937988.281 + 843750] = 284765625.$$

Assim, obtemos valor $T \approx 2014 \cdot 284765625 = 5.735 \times 10^{11}$.

Utilizando a fórmula composta do Trapézio, com $h = 37.5$, temos:

$$\int_0^{150} f(x) dx \approx T(37.5) = \frac{37.5}{2}[0 + 2 \cdot 2228027.344 + 2 \cdot 2636718.75 + 2 \cdot 1937988.281 + 843750] = 270922851.6.$$

Assim, obtemos valor $T \approx 2014 \cdot 270922851.6 = 5.456 \times 10^{11}$.

Item (b).

b) Cálculo do erro de truncamento para as diferentes fórmulas de integração: Erro de truncamento de Simpson:

$$E_S \leq \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta), \quad \eta \in [a, b].$$

Erro de truncamento do Trapézio:

$$E_T \leq \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta), \quad \eta \in [a, b].$$

Assim, derivando a função até à quarta ordem, para o cálculo do erro. Como a função é um polinómio de grau 3, a quarta derivada é nula, i.e., $f^{(iv)} = 0$

Calculando os erros, temos:

$$E_S = 0.$$

$$E_T \leq \frac{37.5^2}{12}(150 - 0) \cdot 1800 = 31640625$$

Item (c).

O número de operários utilizado na construção é calculado através da Fórmula Composta de Simpson, uma vez que esta apresenta um erro de truncatura nulo:

$$\text{Número de operários} = 5.7351 \times 10^{11} 1.742 \times 10^6 = 329229.6211.$$

Exercício 5.

Um fluido atravessa a seção circular de um tubo com velocidade

$$v(r) = 3 \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^{1/7},$$

onde r é a distância radial do centro da seção e $r_0 = 4 \text{ cm}$ é o raio da seção.

Determine a quantidade de fluido por unidade de tempo que atravessa esta seção, dada por

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} r v(r) \, dr.$$

No cálculo utilize 5 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 2]$ e 6 pontos igualmente espaçados no restante intervalo. Use as fórmulas numéricas de integração mais apropriadas para cada caso.

Solução

É necessário definir os valores de r utilizados no cálculo do integral, de acordo com as indicações fornecidas. Verificamos quais os valores pretendidos para integrar, e calculamos $r v(r)$. Assim:

r	0	0.5	1	1.5	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
$v(r)$	3	2.943315	2.879207	2.805183	2.717171	2.631920	2.525947	2.383792	2.159057	0
$r v(r)$	0	1.471657	2.879207	4.207775	5.434342	6.316608	7.072653	7.628135	7.772605	0

Existem dois grupos de pontos com espaçamentos distintos, aos quais são associadas

$$\int_0^4 r \cdot v(r) \, dr \approx \int_0^2 r \cdot v(r) \, dr + \int_2^4 r \cdot v(r) \, dr$$

- $[0, 2]$: $\int_0^2 r \cdot v(r) \, dr$ (4 subintervalos, $h = 0.5$) $\Rightarrow$ Fórmula Composta de Simpson:

$$\int_0^2 r \cdot v(r) \, dr \approx S(0.5) = \frac{0.5}{3} [0 + 4 \cdot 1.471657 + 2 \cdot 2.879207 + 4 \cdot 4.207775 + 5.434342] = 5.651747$$

- $[2, 4]$: $\int_2^4 r \cdot v(r) \, dr$ (5 subintervalos, $h = 0.4$) $\Rightarrow$ Fórmula Composta do Trapézio:

$$\int_2^4 r \cdot v(r) \, dr \approx T(0.4) = \frac{0.4}{2} [5.434342 + 2 \cdot 6.316608 + 2 \cdot 7.072653 + 2 \cdot 7.628135 + 2 \cdot 7.772605 + 0] = 12.602869$$

Assim, o resultado do integral será:

$$\int_0^4 r \cdot v(r) \, dr \approx 5.651747 + 12.602869 = 18.254616$$

Portanto, a quantidade de fluido por unidade de tempo é igual a:

$$Q = 2\pi \int_0^4 r \cdot v(r) \, dr \approx 2\pi \cdot 18.254616 = 114.697135$$