

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211 Tópico 7. “Interpolação polinomial”

Exercício 1.

Considere a seguinte tabela de dados:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	-4	4	0

(a) Determine o polinômio q_2 de grau ≤ 2 que interpola f em 2, 3, 4.

(b) Seja p_2 o polinômio dado por $p_2(x) = -3.5x^2 + 5.5x - 1$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} p_2(x) & \text{se } x \leq 2 \\ q_2(x) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Verifique se g interpola os dados.

(c) Verifique se g é um spline cúbico interpolante.

Solução

Item (a).

Se o polinômio é de grau 2 (n) são necessários 3 ($n + 1$) pontos. Assim, $q_2(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]$

Das diferenças divididas, temos:

x	f_i	$dd1$	$dd2$
2	-4		
		8	
3	4		6
		-4	
4	0		

Assim,

$$q_2(x) = -4 + 8(x - 2) - 6(x - 2)(x - 3).$$

Item (b).

Notemos que:

$$\begin{aligned}g(0) &= p_2(0) = -1, \\g(1) &= p_2(1) = 1, \\g(2) &= p_2(2) = -4, \\g(3) &= q_2(3) = 4, \\g(4) &= q_2(4) = 0.\end{aligned}$$

Logo, $g(x)$, interpola os dados.

Item (c).

Sabemos que para g ser um spline cúbico, precisamos que $g \in \mathcal{C}^2([0, 4])$, mas $p'_2(2) = -8.5$ e $q'_2(2) = 14$, assim não existe o valor $g'(2)$, portanto g não é um spline cúbico.

Exercício 2.

Considere a seguinte tabela de dados:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

- (a) Mostre que $P(x) = 3 - 2(x + 1) + (x + 1)x(x - 1)$ e $Q(x) = -1 + 4(x + 2) - 3(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(x + 1)x$ interpolam os dados acima.
- (b) Argumente porque $P(x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ sem fazer contas ou manipular equações.
- (c) Podemos afirmar que $P(x)$ é uma spline cúbica que interpola os dados?

Solução

Item (a).

Notemos que

$$\begin{array}{ll} P(-2) &= -1, & Q(-2) &= -1, \\ P(-1) &= 3, & Q(-1) &= 3, \\ P(0) &= 1, & Q(0) &= 1, \\ P(1) &= -1, & Q(1) &= -1, \\ P(2) &= 3, & Q(2) &= 3. \end{array}$$

Assim, notamos que tanto P quanto Q , interpolam os dados acima.

Item (b).

Como temos 5 nós de interpolação, então sabemos que existe único polinômio de grau menor ou igual a 4 que interpola os dados. Assim por unicidade deste polinômio, segue-se que $P = Q$.

Item (c).

Por definição, um spline cúbico interpolante S é um polinômio de grau menor ou igual a 3 que para todo $x \in [a, a + 1]$ onde $a \in \{-2, -1, 1\}$ e além disso $S \in \mathcal{C}^2([-2, 2])$.

Notemos que P é um polinômio de grau 3 que interpola os dados. Sabemos também que se P é um polinômio, então $P \in C^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^2([-2, 2])$. Logo P satisfaz todas as condições para ser um spline cúbico, portanto podemos afirmar que $P(x)$ é uma spline cúbica que interpola os dados.

Exercício 3.

A tabela seguinte apresenta a velocidade de queda de um paraquedista em função do tempo:

tempo (s)	1	3	5	7	20
vel (cm/s)	800	2310	3090	3940	8000

- (a) Estime o valor da velocidade no instante de tempo $t = 10$ s, utilizando um polinómio interpolador de grau 3.
- (b) Calcule uma aproximação do erro cometido no item anterior.

Solução

Fazendo a mudança de variável: tempo $\rightarrow x$ e vel $\rightarrow f(x)$.

Item (a).

O polinómio interpolador de grau 3 necessita de 4 pontos e é dado por

$$p_3(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

O ponto interpolador é $x = 10$, assim são necessários os pontos imediatamente à esquerda e à direita, i.e., $x = 7$ e $x = 20$. Tendo já escolhido 2 pontos, falta ainda escolher os outros 2. Estes deverão estar o mais próximo possível do valor a interpolar ($x = 3$ e $x = 5$).

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
3	2310			
		390		
5	3090		8.75	
		425		-0.95664
7	3940		-7.5128	
		312.3077		
20	8000			

Constrói-se o polinómio:

$$p_3(x) = 2310 + (x - 3)390 + (x - 3)(x - 5)8.75 + (x - 3)(x - 5)(x - 7)(-0.95664).$$

Para a velocidade no instante $t = 10$ segundos, assim temos $f(10) \approx p_3(10) = 5245.803167$.

Item (b).

Sabemos que o erro de truncamento é dado por:

$$|R_3(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)||dd4|$$

Para calcular a diferença dividida de ordem 4, é necessário incluir mais um ponto, o mais próximo possível, assim usamos o ponto que tinha sido deixado de lado no item anterior.

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
1	800				
		755			
3	2310		-91.25		
		390		16.6667	
5	3090		8.75		-0.9275
		425		-0.95664	
7	3940		-7.5128		
		312.3077			
20	8000				

Como tal, $|R_3(10)| \leq |(10-3)(10-5)(10-7)(10-20)| - 0.9275| = 973.9191$.

Exercício 4.

Um braço de um robô deve passar nos instantes t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 por posições pré-definidas $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ e $\theta(t_5)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o plano XOY .

t_i	1	2	3	4	5	6
$\theta_i = \theta(t_i)$	1	1.25	1.75	2.25	3	3.15

- Com base nos dados da tabela, aproxime a trajetória do robô por uma spline cúbica completa. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante $t = 1.5$.
- Calcule uma aproximação da velocidade do robô no instante $t = 1.5$.
- Calcule um limite superior do erro de truncamento que se comete quando se usa a derivada da spline calculada para aproximar a velocidade do robô.

Solução

Fazendo a mudança de variável: $t \rightarrow x$ e $\theta \rightarrow f$.

Item (a).

Não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$ e, como a spline é completa, será necessário estimar o valor das derivadas nos extremos. Assim, reservamos dois pontos A e B , que não serão nós da spline, para estimar essas derivadas. Os nós da spline são $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4$ e $x_3 = 6$; portanto, tomamos $A = 2$ e $B = 5$. Logo,

$$f'_0 \approx \frac{f(A) - f_0}{A - x_0} = \frac{1.25 - 1}{2 - 1} = 0.25 \quad f'_n \approx \frac{f_n - f(B)}{x_n - B} = \frac{3.15 - 3}{6 - 5} = 0.15.$$

Determinamos as equações, respeitantes os nós de fronteira, x_0 e x_3 , respectivamente.

- $2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0) - 6f'(x_0) \Leftrightarrow 4M_0 + 2M_1 = 0.75,$
- $2(x_3 - x_2)M_3 + (x_3 - x_2)M_2 = 6f'(x_3) - \frac{6}{x_3 - x_2}(f_3 - f_2) \Leftrightarrow 4M_3 + 2M_2 = -1.8.$

Para os nós interiores, x_1 ($i = 1$) e x_2 ($i = 2$), respectivamente, temos:

- $(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_0)M_2 = \frac{6}{x_2 - x_1}(f_2 - f_1) - \frac{6}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0) \Leftrightarrow 2M_0 + 6M_1 + M_2 = 0.75,$
- $(x_2 - x_1)M_1 + 2(x_3 - x_1)M_2 + (x_3 - x_1)M_3 = \frac{6}{x_3 - x_2}(f_3 - f_2) - \frac{6}{x_2 - x_1}(f_2 - f_1) \Leftrightarrow M_1 + 6M_2 + 2M_3 = -0.3.$

Juntando as 4 equações anteriores na ordem dos nós x_0, x_1, x_2 e x_3 , obtemos o seguinte sistema linear nas incógnitas M_0, M_1, M_2 e M_3 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ -0.3 \\ -1.8 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear temos:

$M_0 = 0.160938$, $M_1 = 0.053125$, $M_2 = 0.109375$ e $M_3 = -0.504688$.

O ponto interpolador $x = 1.5$ localiza-se no 1º segmento $[1, 3]$. Para $i = 1$, fazemos:

$$\begin{aligned} s_3^1(x) &= \frac{M_0}{6(x_1 - x_0)}(x_1 - x)^3 + \frac{M_1}{6(x_1 - x_0)}(x - x_0)^3 + \\ &+ \left[\frac{f_0}{x_1 - x_0} - \frac{M_0(x_1 - x_0)}{6} \right] (x_1 - x) + \left[\frac{f_1}{x_1 - x_0} - \frac{M_1(x_1 - x_0)}{6} \right] (x - x_0), \\ s_3^1(x) &= 0.013412(3 - x)^3 + 0.004427(x - 1)^3 + 0.446354(3 - x) + 0.857292(x - 1) \end{aligned}$$

Logo, $s_3^1(1.5) = 1.143996 \approx f(1.5)$.

Item (b).

A aproximação da velocidade corresponde à derivada de $s_3^1(x)$, assim:

$$s_3^1(x) = -0.040236(3 - x)^2 + 0.013281(x - 1)^2 - 0.446354 + 0.857292$$

Logo, $s_3^1(1.5) = 0.323727 \text{ rad/s}$.

Item (c).

O erro da aproximação da derivada é dado pela expressão:

$$|f'(x) - s_3'(x)| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4,$$

em que M_4 é o majorante da 4ª derivada, i.e., é a diferença dividida de quarta ordem de maior módulo multiplicada por 4! e h é a máxima distância entre 2 nós consecutivos da spline.

Para uma melhor estimação do erro, incluímos na tabela das diferenças divididas todos os pontos conhecidos, indiferentemente de serem ou não nós da spline.

Calculando as diferenças divididas:

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
1	1				
		0.25			
2	1.25		0.125		
		0.5		-0.04167	
3	1.75		0		0.0208
		0.5		0.04167	
4	2.25		0.125		-0.0458
		0.75		-0.1417	
5	3		-0.3		
		0.15			
6	3.15				

Assim, o erro é dado por:

$$|f'(x) - s_3'(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot 23 \cdot |-0.0458| \cdot 4! = 0.36667$$

Exercício 5.

A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 a 1980.

Ano	1940	1950	1960	1970	1980
População	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

- (a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população no ano 1965.
- (b) A população em 1930 foi 123.203 Qual a precisão do valor calculado na alínea a)?

Solução

Fazendo a mudança de variável: ano $\rightarrow x$ e população $\rightarrow f(x)$.

Item (a).

Se o polinómio é de grau 4 (n) são necessários 5 ($n + 1$) pontos. Assim:

$$\begin{aligned} p_4(x) = & f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \end{aligned}$$

Assim, da tabela de diferenças divididas, temos:

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
1940	132.165				
		1.916100			
1950	151.326		0.044180		
		2.799700		-0.002142	
1960	179.323		-0.020090		0.000067
		2.397900		0.000547	
1970	203.302		-0.003695		
		2.324000			
1980	226.542				

Assim,

$$\begin{aligned} p_4(x) = & 132.165 + (x - 1940)1.916100 + (x - 1940)(x - 1950)0.044180 + \\ & (x - 1940)(x - 1950)(x - 1960) \cdot (-0.002142) \\ & + (x - 1940)(x - 1950)(x - 1960)(x - 1970)0.000067 \end{aligned}$$

Para estimar a população no ano 1965, calcula-se $p_4(1965) \approx f(1965)$, assim:

$$p_4(1965) = 191.9879$$

Em 1965, existiam aproximadamente 191.9879 milhões de habitantes nos Estados Unidos da América.

Item (b).

Para calcular a precisão do valor calculado no item anterior, é necessário introduzir o valor de $x = 1930$ na tabela das diferenças divididas. O local de colocação do novo ponto é indiferente (a $dd5$ será sempre a mesma). Assim:

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$	$dd5$
1940	132.165					
		1.9161				
1950	151.326		0.04418			
		2.7997		-0.002142		
1960	179.323		-0.02009		0.000067	
		2.3979		0.000547		0.000002
1970	203.302		-0.003695		0.000044	
		2.324		-0.000338		
1980	226.542		0.006431			
		2.06678				
1930	123.203					

Para calcular o erro temos:

$$|R_4(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)||dd5|$$

Assim, o erro de truncamento para o valor do item anterior, $x = 1965$, é de:

$$|R_n(1965)| \leq 0.2813$$