

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211 Tópico 6. “Ajuste de curvas”

Exercício 1.

Cobre é um material muito valorizado na indústria devido às suas excelentes propriedades de condutividade térmica e elétrica. Um modelo de condutividade térmica é dado pela seguinte expressão:

$$k(T) = \frac{1}{\frac{c_1}{T} + c_2 T^2},$$

onde T denota a temperatura em K (kelvin).

Para uma pressão de 101325 pascal, temos os seguintes valores de condutividade térmica em mil W/mK (Watts por metro kelvin):

Temperatura em K	5	10	20	30	40	50	60
Condutividade térmica em milhares de W/mK	19.5	24.3	10.8	4.45	2.17	1.25	0.829

- (a) Utilize o método dos Quadrados Mínimos para ajustar a função $k(T)$ aos dados da tabela.
- (b) Utilize o modelo ajustado para estimar a condutividade térmica do cobre, em W/mK , para a temperatura de $27 K$ (mantida a mesma pressão).

Solução

Item (a).

Renomeando, $Y = k(T)$ e inserindo a nova variável $z = \frac{1}{Y}$, temos:

$$z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{T} c_1 + c_2 T^2 = \phi_1(T) c_1 + c_2 \phi_2(T).$$

Agora, para z , temos a seguinte tabela de dados:

T	5	10	20	30	40	50	60
$z = \frac{1}{Y}$	0.0513	0.0412	0.0926	0.2247	0.4608	0.8000	1.206

Escrevendo o nosso problema da forma matricial, temos:

$$Ac = z,$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} \phi_1(T_1) & \phi_2(T_1) \\ \phi_1(T_2) & \phi_2(T_2) \\ \phi_1(T_3) & \phi_2(T_3) \\ \phi_1(T_4) & \phi_2(T_4) \\ \phi_1(T_5) & \phi_2(T_5) \\ \phi_1(T_6) & \phi_2(T_6) \\ \phi_1(T_7) & \phi_2(T_7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 25 \\ 0.1 & 100 \\ 0.05 & 400 \\ 0.0333 & 900 \\ 0.025 & 1600 \\ 0.02 & 2500 \\ 0.01667 & 3600 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z = \begin{bmatrix} 0.0513 \\ 0.0412 \\ 0.0926 \\ 0.2247 \\ 0.4608 \\ 0.8000 \\ 1.206 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que resolver o problema $\|z - Ac\|_2$ é equivalente a resolver o problema $A^t A c = A^t z$, logo:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 0.0549 & 215 \\ 215 & 22750625 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A^t z = \begin{bmatrix} 0.0741 \\ 7324.5901 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, temos que

$$c^* = \begin{bmatrix} 0.0926 \\ 0.0032 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$Y = K(T) \approx \frac{1}{\frac{c_1}{T} + c_2 T^2} = \frac{1}{\frac{0.0926}{T} + 0.0032 T^2}.$$

Item (b).

Aplicando a expressão encontrada no item anterior para $T = 27$, temos,

$$K(27) \approx \frac{1}{\frac{c_1}{T} + c_2 T^2} = \frac{1}{\frac{0.0926}{27} + 0.0032(27)^2} = 4,5019 \text{ W/mK}.$$

Exercício 2.

Considere os seguintes dados de um sinal senoidal ruidoso dado por $A = \text{sen}(\omega t + \phi)$. Aqui, a amplitude do sinal é dada por $A = 2$, porém a frequência angular ω e a fase ϕ são desconhecidas.

t	1	1.5	2	2.5	3
$y = \text{sen}(\omega t + \phi)$	1.9804	1.4830	0.2106	-0.9892	-1.7492

- (a) Utilize o Método dos Quadrados Mínimos para estimar ω e ϕ .
- (b) Calcule o resíduo do ajuste encontrado.

Solução

Item (a).

Aqui, notemos que

$$y = 2\text{sen}(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \text{sen}(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \text{sen}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = \omega t + \phi.$$

Agora, fazendo $z = \text{sen}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = \omega t + \phi = \omega\varphi_1(t) + \phi\varphi_2(t)$, temos a seguinte tabela de dados para a nova variável z :

t	1	1.5	2	2.5	3
$z = \text{sen}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)$	1.4307	0.8353	0.1055	-0.5174	-1.0646

Escrevendo o nosso problema da forma matricial, temos:

$$Ac = z,$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) \\ \varphi_1(t_3) & \varphi_2(t_3) \\ \varphi_1(t_4) & \varphi_2(t_4) \\ \varphi_1(t_5) & \varphi_2(t_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2.5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \omega \\ \phi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z = \begin{bmatrix} 1.4307 \\ 0.8353 \\ 0.1055 \\ -0.5174 \\ -1.0646 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que resolver o problema $\|z - Ac\|_2$ é equivalente a resolver o problema $A^t Ac = A^t z$, logo:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 22.5 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A^t z = \begin{bmatrix} -1.5926 \\ 0.7895 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, temos que

$$c^* = \begin{bmatrix} -1.2687 \\ 2.6952 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$y(t) \approx 2\text{sen}(-1.2687t + 2.6952).$$

Item (b).

Sabemos que o resíduo é dado por:

$$\|r\|_2 = \|b - Ac^*\|_2,$$

substituindo os valores, encontramos

$$\|r\|_2 = 0.1458.$$

Exercício 3.

A seguinte tabela mostra o número de usuários de internet emtre 100 habitantes nos anos de 1998 até 2007.

Ano t	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
% Usuários	1	1	2	3	4	5	7	9	12	17

- Seja $x = t - 1998$. Utilize o método dos quadrados mínimos para ajustar uma curva exponencial da forma ae^{bx} aos dados da tabela.
- Qual é o erro obtido neste ajuste? Em outras palavras, qual é a norma euclidiana do resíduo?
- Utilize o resultado obtido para estimar a porcentagem de usuários de internet nos países em desenvolvimento no ano 2010.

Solução

Item (a).

Aqui, notemos que

$$y = ae^{bx} \Leftrightarrow \ln y = \ln(ae^{bx}) \Leftrightarrow \ln y = \ln a + bx.$$

Agora, fazendo $z = \ln y = \ln a + bx = \ln a \phi_1(x) + b \phi_2(x)$, temos a seguinte tabela de dados para a nova variável z :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	0	0	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094	1.9459	2.1972	2.4849	2.8332

Escrevendo o nosso problema da forma matricial, temos:

$$Ac = z,$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) \\ \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) \\ \phi_1(x_4) & \phi_2(x_4) \\ \phi_1(x_5) & \phi_2(x_5) \\ \phi_1(x_6) & \phi_2(x_6) \\ \phi_1(x_7) & \phi_2(x_7) \\ \phi_1(x_8) & \phi_2(x_8) \\ \phi_1(x_9) & \phi_2(x_9) \\ \phi_1(x_{10}) & \phi_2(x_{10}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \ln a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6931 \\ 1.0986 \\ 1.3863 \\ 1.6094 \\ 1.9459 \\ 2.1972 \\ 2.4849 \\ 2.8332 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que resolver o problema $\|z - Ac\|_2$ é equivalente a resolver o problema $A^t Ac = A^t z$, logo:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 10 & 45 \\ 45 & 285 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A^t z = \begin{bmatrix} 14.2487 \\ 90.7087 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, temos que

$$c^* = \begin{bmatrix} -0.0255 \\ 0.3223 \end{bmatrix}.$$

Daí, temos que $\ln a = -0.0255 \Leftrightarrow a = e^{-0.0255} = 0.9748$. Assim,

$$y(t) \approx 0.9748e^{0.3223x} = 0.9748e^{0.3223(t-1998)}.$$

Item (b).

Sabemos que o resíduo é dado por:

$$\|r\|_2 = \|b - Ac^*\|_2,$$

substituindo os valores, encontramos

$$\|r\|_2 = 14.002.$$

Item (c).

Utilizando os resultados obtidos, estimamos o % de Usuários em 2010 por

$$y(2010) \approx 0.9748e^{0.3223(2010-1998)} \approx 46.6222.$$

Exercício 4.

Considere o sistema linear sobredeterminado, $Ax = b$, onde $A : m \times n$ com $m > n$. Tais sistemas, em geral, não admitem solução. No entanto, nestes casos, o objetivo é encontrar a solução de quadrados mínimos, isto é, aquela para a qual se tem a soma dos quadrados dos resíduos $\left(\sum_{i=1}^m r_i^2\right)$ mínima, onde r_i é a componente i do vetor $r = b - Ax$. Encontre a solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\sum_{i=1}^4 r_i^2$. Troque o vetor b por $[-4, 3, -2, 6]^t$ e obtenha a solução de quadrados

mínimos para este novo sistema linear. Observe que neste caso se tem $\sum_{i=1}^m r_i^2 = 0$. Por que?

Solução

Sabemos a solução de quadrados mínimos $Ax = b$ é obtida resolvendo o problema $\|b - Ax\|_2$, mas sabemos que resolver este problema é equivalente a resolver o problema $A^t Ax = A^t b$, logo:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A^t b = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, temos que

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.8000 \\ 2.6000 \end{bmatrix}.$$

Logo, o quadrado do resíduo de $Ax = b$ é

$$\sum_{i=1}^m r_i^2 = \|r\|_2^2 = \|b - Ax^*\|_2^2 = 61.0000.$$

Agora, tomando $b' = [-4, 3, -2, 6]^t$, temos

$$A^t b' = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o novo sistema $A^t Ax = A^t b'$, temos

$$x^* = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, o quadrado do resíduo de $Ax = b'$ é

$$\sum_{i=1}^m r_i^2 = \|r\|_2^2 = \|b' - Ax^*\|_2^2 = 0.$$

Aqui, notemos que b' é tal que se $v = [-2, 3]$, então $Av = b'$, isto nos diz que b' está no espaço coluna da matriz A , o que nos garante a solução exata para o sistema $Ax = b$, mesmo que a matriz A não seja quadrada. O mesmo não acontece com o vetor b , uma vez que b não pertence ao espaço coluna de A , pois não existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $Aw = b$.

Exercício 5.

O consumo de gás natural sofre uma redução significativa durante os meses de Verão. Na tabela seguinte estão registados alguns valores recolhidos ao longo do ano de 2006.

mês	1	3	4	6	9	12
consumo	20.0	7.5	6.5	7.0	10.0	A

Uma companhia de gás sugeriu um modelo do tipo

$$M(x, c_1, c_2) = c_1 x_2 + c_2 \frac{1}{x}$$

para estimar o consumo de gás em qualquer altura do ano. No sentido dos mínimos quadrados e considerando a amostra de 6 pontos,

- (a) Apresente o sistema de equações lineares que deve ser utilizado para calcular os parâmetros c_1 e c_2 , em função de A ;
- (b) Considerando $A = 15.0$ e encontre o modelo sugerido.

Solução

Mudança de variável: mês $\rightarrow x$ e consumo de gás $\rightarrow f(x)$.

Item (a).

Aqui temos, $\phi_1 = x_2$ e $\phi_2 = \frac{1}{x}$. Para obter os coeficientes do modelo apresentamos os cálculos na seguinte tabela.

x	$f(x)$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1^2	ϕ_2^2	$\phi_1\phi_2$	$f\phi$	$f\phi_2$
1	20.0	1	1	1	1	1	20	20
3	7.5	9	0.333333	81	0.111111	3	67.5	2.5
4	6.5	16	0.250	256	0.0625	4	104	1.625
6	7.0	36	0.166667	1296	0.027778	6	252	1.166667
9	10.0	81	0.111111	6561	0.012346	9	810	1.111111
12	A	144	0.083333	20736	0.006944	12	144A	0.083333A
Σ	—	—	—	28931	1.220679	35	$1253.5 + 144A$	$26.402778 + 0.083333A$

O sistema linear para a determinação dos coeficientes é dado por:

$$\begin{bmatrix} 28931 & 35 \\ 35 & 1.220679 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1235.5 + 144A \\ 26.402778 + 0.083333A \end{bmatrix}$$

Item (b).

Com $A = 15$, o sistema toma a forma:

$$\begin{bmatrix} 28931 & 35 \\ 35 & 1.220679 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3413.5 \\ 27.652778 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, temos $c_1 = 0.093837$ e $c_2 = 19.963061$, assim o modelo é dado por

$$M(x) = 0.093837x^2 + \frac{19.963061}{x}$$