

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211

Tópico 5. “Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias”

Exercício 1.

Considere o problema

$$\begin{cases} y'' &= y' + xy \\ y(1) &= 0 \\ y'(1) &= 2 \end{cases}$$

- (a) Transforme este problema em um PVI vetorial.
- (b) Aplique o método de Euler Aperfeiçoado com $h = 0.1$ para estimar o valor de $y(1.2)$. Qual é o valor encontrado?

Solução

Item (a).

Seja $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y' + xy \end{pmatrix};$

Assim, temos o seguinte PVI:

$$\begin{aligned} Y' &= \begin{pmatrix} y' \\ y' + xy \end{pmatrix} = f(x, y), \\ Y(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Item (b).

Aplicando o Método, temos:

x_k	$Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} y'_k \\ y'_k + x_k y_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = Y_k + Y'_k h$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} y'_k \\ \bar{y}'_k + x_{k+1} \bar{y}_k \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 2 \\ 2, 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 2 \\ 2, 42 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 0, 21 \\ 2, 221 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 221 \\ 2, 4520 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0, 4321 \\ 2, 4662 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 4662 \\ 2, 9847 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0, 4444 \\ 2, 4928 \end{pmatrix}$	— — —	— — —	— — —

Logo, o valor de $y(1.2)$ é aproximadamente 0,4444.

Exercício 2.

Um paraquedista salta de um avião a uma altura de 600 metros. Após 5 segundos, o paraquedas abre. A altura de queda do paraquedista em função do tempo, $y(t)$, é dada por

$$y''(t) = -g + \frac{\alpha(t)}{m}, \quad y(0) = 600 \text{ m e } y'(0) = 0 \text{ m/s}$$

em que $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade e $m = 80 \text{ kg}$ é a massa do paraquedista, juntamente com o peso do seu equipamento.

A resistência do ar $\alpha(t)$ é proporcional ao quadrado da velocidade, com diferentes constantes de proporcionalidade antes e depois da abertura do paraquedas:

$$\alpha(t) = \begin{cases} K_1[y'(t)]^2, & t < 5 \text{ s}, \\ K_2[y'(t)]^2, & t \geq 5 \text{ s}. \end{cases}$$

Considere $K_1 = 1/150$, $K_2 = 4/150$. A que altura o paraquedas abre? (considere um espaçamento de 2.5 segundos para a malha temporal).

Solução

Mudança de variável: $t \rightarrow x$.

Trata-se de uma equação diferencial de 2ª ordem com condições iniciais, dando origem a um sistema de 2 equações de 1ª ordem com condições iniciais. Vai surgir uma nova variável independente $y = y_1$.

As condições iniciais são: $y_{1,0} = y_1(0) = y(0) = 600$ e $y_{2,0} = y_2(0) = y'_1(0) = 0$. Discretizando x , para $h = 2.5$, vem: $x_0 = 0$, $x_1 = 2.5$ e $x_2 = 5$ (quando o paraquedas abre). Substituindo as constantes, temos:

Quando $x < 5$, utiliza-se a expressão:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 & = f_1(x, y_1, y_2) \\ y'_2 = -9.81 + \frac{y_2^2}{80 \cdot 150} & = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Quando $x \geq 5$, usa-se:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 & = f_1(x, y_1, y_2) \\ y'_2 = -9.81 + \frac{4y_2^2}{80 \cdot 150} & = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

O sistema de equações diferenciais vai ser resolvido usando o Método de Runge-Kutta de 2ª ordem para sistemas:

1ª etapa ($i = 0$):

$$p_1 = hf_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 2.5f_1(0, 600, 0) = 0$$

$$p_2 = hf_2(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 2.5f_2(0, 600, 0) = -24.525$$

$$q_1 = hf_1(x_1, y_{1,0} + p_1, y_{2,0} + p_2) = 2.5f_1(2.5, 600, -24.525) = -61.3125$$

$$q_2 = hf_2(x_1, y_{1,0} + p_1, y_{2,0} + p_2) = 2.5f_2(2.5, 600, -24.525) = -24.399693$$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{2}(p_1 + q_1) = 600 + \frac{1}{2}(0 + (-61.3125)) = 569.34375 \approx y_1(2.5)$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{2}(p_2 + q_2) = 0 + \frac{1}{2}(-24.525 + (-24.399693)) = -24.462346 \approx y_2(2.5)$$

2ª etapa ($i = 1$):

NOTA: No cálculo dos q's vai usar-se a expressão f_2 para $x \geq 5$.

$$p_1 = hf_1(x_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 2.5f_1(2.5, 569.34375, -24.462346) = -61.155866$$

$$p_2 = hf_2(x_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 2.5f_2(2.5, 569.34375, -24.462346) = -24.400332$$

$$q_1 = hf_1(x_2, y_{1,1} + p_1, y_{2,1} + p_2) = 2.5f_1(5, 508.187884, -48.862678) = -122.156696$$

$$q_2 = hf_2(x_2, y_{1,1} + p_1, y_{2,1} + p_2) = 2.5f_2(5, 508.187884, -48.862678) = -22.535366$$

$$y_{1,2} = y_{1,1} + \frac{1}{2}(p_1 + q_1) = 569.34375 + \frac{1}{2}(-61.155866 + (-122.156696)) = 477.687469 \approx y_1(5)$$

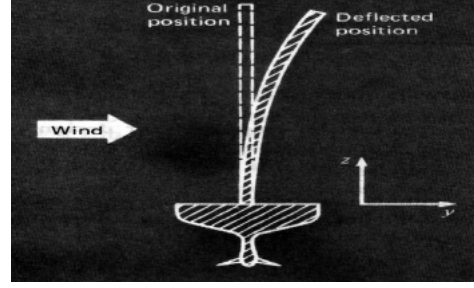
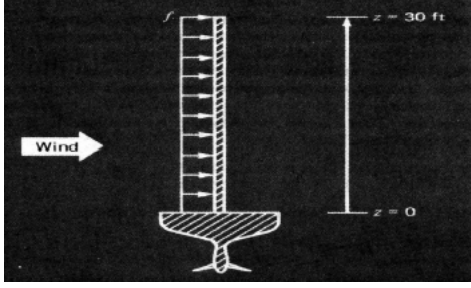
$$y_{2,2} = y_{2,1} + \frac{1}{2}(p_2 + q_2) = -24.462347 + \frac{1}{2}(-24.400332 + (-22.535366)) = -47.930195 \approx y_2(5)$$

Nota: na 2ª etapa, nos cálculos dos q's utiliza-se a expressão para $x \geq 5$.

Portanto, o paraquedas abre aos aproximadamente 477.687469 metros de altitude.

Exercício 3.

Suponha uma força f (com $f = 50$) uniformemente distribuída ao longo do mastro de um barco. O vento origina uma flexão no mastro.



Para caracterizar este fenômeno, usamos as leis da mecânica, e conseguimos a seguinte equação

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{f}{2EI}(L - z)^2$$

em que E é o módulo de elasticidade, $E = 1.5 \times 10^8$, L é a altura do mastro, $L = 30$, e I é o momento de inércia, $I = 0.06$. Em $z = 0$, $y = 0$ e $\frac{dy}{dz} = 0$. Calcule numericamente a flexão no topo do mastro usando o método de Runge-Kutta de 2ª ordem. Considere $h = 15$.

Solução

Mudança de variável: $z \rightarrow x$.

Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem com condições iniciais. Introduzindo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix},$$

obtemos um sistema de primeira ordem com condições iniciais

$$y_{1,0} = y_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_{2,0} = y_2(0) = y'(0) = 0.$$

Discretizando a variável independente x com passo $h = 15$, obtemos $x_0 = 0$, $x_1 = 15$ e $x_2 = 30$.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = \frac{50}{2 \cdot 1.5 \cdot 10^8 \cdot 0.06}(30 - x)^2 & = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

O sistema será resolvido recorrendo ao Método de Runge-Kutta de 2ª ordem para sistemas. 1ª etapa ($i = 0$):

$$p_1 = hf_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 15f_1(0, 0, 0) = 0$$

$$p_2 = hf_2(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 15f_2(0, 0, 0) = 0.0375$$

$$q_1 = hf_1(x_1, y_{1,0} + p_1, y_{2,0} + p_2) = 15f_1(15, 0, 0.0375) = 0.5625$$

$$q_2 = hf_2(x_1, y_{1,0} + p_1, y_{2,0} + p_2) = 15f_2(15, 0, 0.0375) = 0.009375$$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{2}(p_1 + q_1) = 0 + \frac{1}{2}(0 + 0.5625) = 0.28125 \approx y_1(15)$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{2}(p_2 + q_2) = 0 + \frac{1}{2}(0.0375 + 0.009375) = 0.023438 \approx y_2(15)$$

2ª etapa ($i = 1$):

$$p_1 = hf_1(x_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 15f_1(15, 0.28125, 0.023438) = 0.35157$$

$$p_2 = hf_2(x_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 15f_2(15, 0.28125, 0.023438) = 0.009375$$

$$q_1 = hf_1(x_2, y_{1,1} + p_1, y_{2,1} + p_2) = 15f_1(30, 0.63282, 0.032813) = 0.492195$$

$$q_2 = hf_2(x_2, y_{1,1} + p_1, y_{2,1} + p_2) = 15f_2(30, 0.63282, 0.032813) = 0$$

$$y_{1,2} = y_{1,1} + \frac{1}{2}(p_1 + q_1) = 0.28125 + \frac{1}{2}(0.35157 + 0.492195) = 0.703133 \approx y_1(30)$$

$$y_{2,2} = y_{2,1} + \frac{1}{2}(p_2 + q_2) = 0.023438 + \frac{1}{2}(0.009375 + 0) = 0.028126 \approx y_2(30)$$

Portanto, a flexão no topo do mastro é de aproximadamente 0.703133 metros.

Exercício 4.

O último periélio (ponto mais próximo do Sol na órbita de um planeta) do cometa Halley aconteceu a 9 de Fevereiro de 1986. As componentes da sua posição e velocidade nessa data (instante inicial) foram:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (0.325514, -0.459460, 0.166229), \\ (x', y', z') &= (-9.096111, -6.916686, -1.305721),\end{aligned}$$

em que a posição é medida em unidades astronómicas (distância média da terra ao sol) e o tempo em anos. As equações do movimento são:

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{\pi^2 x}{r^2}, \\ y''(t) = -\frac{\pi^2 y}{r^2}, \\ z''(t) = -\frac{\pi^2 z}{r^2}, \end{cases}$$

em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sendo as perturbações planetárias negligenciadas. Formule este problema sem o resolver, em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Caracterize todas as equações do novo sistema, identificando todas as variáveis envolvidas e as condições auxiliares.

Solução

Mudança de variável: $t \rightarrow x$, $x \rightarrow y_1$, $x' \rightarrow y_2$, $y \rightarrow y_3$, $y' \rightarrow y_4$, $z \rightarrow y_5$, $z' \rightarrow y_6$. Trata-se de um sistema de 3 equações diferenciais de 2ª ordem com condições iniciais. Que dará origem a um sistema de 6 equações diferenciais de 1ª ordem com condições iniciais, surgindo 3 novas variáveis dependentes.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ y_2' = -\frac{\pi^2 y_1}{r^2} & = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ y_3' = y_4 & = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ y_4' = -\frac{\pi^2 y_3}{r^2} & = f_4(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ y_5' = y_6 & = f_5(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ y_6' = -\frac{\pi^2 y_5}{r^2} & = f_6(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \end{cases}$$

com $r = \sqrt{y_1^2 + y_3^2 + y_5^2}$.

Com as seguintes condições iniciais: $y_1(0) = 0.325514$, $y_3(0) = -0.459460$, $y_5(0) = 0.166229$, $y_2(0) = -9.096111$, $y_4(0) = -6.916686$, $y_6(0) = -1.305721$.

Exercício 5.

A equação de Schrödinger da mecânica quântica pode ser escrita como:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + [n(x) - \beta_n]\psi(x) = 0$$

com as condições auxiliares $\frac{d\psi(-1)}{dx} = -0.5$, $\psi(2) = 0$ e $x \in [-1, 2]$. Considerando $n(x) = n_0 = 100$ e $\beta_n = 95$, construa e resolva o sistema linear de estimação de $\psi(-1)$, $\psi(0)$ e $\psi(1)$.

Solução

Mudança de variável: $\psi \rightarrow y$.

Substituindo as constantes obtemos:

$$y''(x) + 5y(x) = 0$$

com as condições auxiliares $y'(-1) = -0.5$ e $y(2) = 0$.

Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem com condições de fronteira em $[-1, 2]$, pois as condições referem-se aos pontos de fronteira -1 e 2 . O domínio será discretizado com $h = 1$, obtendo-se $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ (2 pontos interiores).

Substituímos as derivadas da equação diferencial por uma discretização de diferenças finitas centrais. A equação diferencial tem apenas uma segunda derivada, assim:

$$\frac{1}{h^2}[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] + 5y_i = 0.$$

Substitui-se o i da equação anterior pelo índice dos pontos interiores ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} i = 1 & \rightarrow y_0 + 3y_1 + y_2 = 0, \\ i = 2 & \rightarrow y_1 + 3y_2 + y_3 = 0. \end{aligned}$$

Obtém-se um sistema linear com 2 equações e 4 incógnitas.

Das condições de fronteira sabemos que $y_3 = 0$ pois $y(x_3) = y(2) = 0$ e discretizando as condições de fronteira diferenças finitas regressivas obtemos a equação:

$$y'(-1) = -0.5 \approx \frac{1}{1}(y_1 - y_0) = -0.5.$$

Organizando as 3 equações em um sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ - & 1 & 3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cujas soluções, é dada por:

$$y_0 = 0.363636 \approx y(-1), \quad y_1 = -0.136364 \approx y(0), \quad y_2 = 0.045455 \approx y(1)$$

Logo, $\psi(-1) \approx 0.363636$, $\psi(0) \approx -0.136364$ e $\psi(1) \approx 0.045455$.