

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211

Tópico 4. “Resolução de sistemas não lineares”

Exercício 1.

O sistema LORAN (LONg RANge Navigation) calcula a posição de um barco no mar a partir de sinais de dois pares de transmissores fixos. O sistema calcula a diferença de tempo entre o recebimento dos sinais dos dois transmissores de cada um dos pares. Uma dada diferença constante de tempo entre os sinais pode ser representada por uma linha hiperbólica de posição. Portanto, a posição do barco é dada pela interseção de duas hipérboles como por exemplo:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{186^2} - \frac{x_2^2}{300^2 - 186^2} = 1 \\ \frac{(x_2 - 500)^2}{279^2} - \frac{(x_1 - 300)^2}{500^2 - 279^2} = 1 \end{cases}$$

- (a) Encontre a matriz Jacobiana do sistema.
- (b) Partindo do chute inicial $x^0 = [250, 200]^t$, execute o método de Newton até $\|F(x^{(k)})\|_\infty < 0.1$ ou $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 0.1$. Qual é a aproximação obtida da posição do barco?
- (c) Qual é o problema se escolhermos $x^0 = [0, 0]^t$ como chute inicial?

Solução

Item (a).

Notemos que resolver este problema é equivalente a resolver o problema

$$F(x) = \mathbf{0},$$

onde,

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{186^2} - \frac{x_2^2}{300^2 - 186^2} - 1 \\ \frac{(x_2 - 500)^2}{279^2} - \frac{(x_1 - 300)^2}{500^2 - 279^2} - 1 \end{bmatrix}$$

Para aplicar o método de Newton para resolver este problema, devemos calcular a matriz jacobiana de F , assim

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{2x_1}{186^2} & -\frac{2x_2}{300^2 - 186^2} \\ -\frac{2(x_1 - 300)}{500^2 - 279^2} & \frac{2(x_2 - 500)}{279^2} \end{bmatrix}.$$

Item (b).

Sabendo do método de Newton que $J(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$. Aplicando este método a partir do ponto $x^0 = [250, 200]^t$, temos:

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\ F(x^{(k)})\ _\infty$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 250 \\ 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0842 \\ 0.1417 \end{pmatrix}$	0.1417	—
1	$\begin{pmatrix} 253.4589 \\ 218.6417 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0059 \\ 0.0044 \end{pmatrix}$	0.0059	18.6417

Paramos, pois $\|F(x^{(1)})\|_\infty = 0.0059 < 0.1$. Logo a posição do barco é $x \approx \begin{pmatrix} 253.4589 \\ 218.6417 \end{pmatrix}$.

Item (c).

Caso iniciássemos com $x^0 = [0, 0]^t$, teríamos

$$J(x^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 600 & 1000 \\ \frac{600}{500^2 - 279^2} & -\frac{1000}{279^2} \end{bmatrix},$$

assim, $\det(J(x^0)) = 0$, o que nos impossibilita aplicar o método de Newton.

Exercício 2.

Os donos Justin T. Lake e Dustin Z. Fake da empresa DOLDYS investiram \$20000 no desenho e no desenvolvimento do seu novo produto “Go-RNiX (by Justin & Dustin)” que pode ser produzido a um custo de \$2 por unidade.

Antes de lançar o Go-RNiX no mercado, eles contratam a empresa de consultoria CoolCon. A CoolCon chega as seguintes conclusões: se gastar \$c em comerciais e consultoria e vender o Go-RNiX por um preço de \$p por unidade, eles conseguem vender $2000 + 4\sqrt{c} - 20p$ unidades.

- Usando estas informações, expresse o lucro da DOLDYS com a venda do Go-RNiX como uma função $f(c, p)$ de c e p .
- Determine uma boa aproximação do vetor $x^* = (c^*, p^*)^t$ que maximize o lucro da DOLDYS e que segundo as estimativas da CoolCon é aproximadamente igual a $(15000, 65)$. Aplique o método de Newton com precisão $\varepsilon = 0.1$ e $x^0 = (15000, 65)$ considerando que x^* é tal que $\nabla f(x^*) = (0, 0)^t$. Seja $F = \nabla f$. Verifique se um dos 2 critérios de parada é satisfeito. Qual é o lucro maximal que a DOLDYS pode realizar?

Solução

Item (a).

Pelas especificações do enunciado do exercício constatamos que a função lucro é dada por:

$$f(c, p) = (2000 + 4\sqrt{c} - 20p)(p - 2) - 20000 - c$$

Item (b).

Como queremos olhar para o maximo da função lucro, vamos calcular o ∇f e ver quando ele zera. Assim:

$$\nabla f(c, p) = \begin{bmatrix} 2c^{-1/2}(p - 2) - 1 \\ -20(p - 2) + 2000 + 4\sqrt{c} - 20p \end{bmatrix}.$$

Logo o nosso problema é encontrar $x^* = (c^*, p^*)$ tal que $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$. Logo maximizar o lucro da DOLDYS é equivalente a resolver o problema $F(x) = \mathbf{0}$, onde

$$F(x) = F(c, p) = \begin{bmatrix} 2c^{-1/2}(p - 2) - 1 \\ -20(p - 2) + 2000 + 4\sqrt{c} - 20p \end{bmatrix}.$$

Para aplicar o método de Newton para resolver este problema, devemos calcular a matriz jacobiana de F , assim

$$J(x) = \begin{bmatrix} -c^{-3/2}(p - 2) & 2c^{-1/2} \\ 2c^{-1/2} & -40 \end{bmatrix}.$$

Sabendo do método de Newton que $J(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$. Aplicando este método a partir do ponto $x^0 = (15000, 65)^t$, temos:

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\ F(x^{(k)})\ _\infty$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$
0	$\begin{pmatrix} 15000 \\ 65 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6288 \\ -70.1021 \end{pmatrix}$	70.1021	—
1	$\begin{pmatrix} 14967.0133 \\ 63.2340 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0010 \\ -0.0010 \end{pmatrix}$	0.001	32.9867

Paramos, pois $\|F(x^{(1)})\|_\infty = 0.001 < 0.1$. Logo o máximo lucro que a DOLDYS pode realizar é $f(x) \approx f(253.4589, 218.6417) \approx 40025,00$, ou seja, aproximadamente \$40025.

Exercício 3.

Num coletor solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (T_1) e da placa de vidro (T_2):

$$\begin{cases} (T_1^4 + 0.06823T_1) - (T_2^4 + 0.05848T_2) = 0.01509, \\ (T_1^4 + 0.05848T_1) - (2T_2^4 + 0.11696T_2) = 0. \end{cases}$$

Usando como aproximação inicial à solução $T^0 = (0.30, 0.30)$ faça uma iteração do método iterativo de Newton. Indique uma estimativa do erro relativo da aproximação.

Solução

Inicialmente, faremos a seguinte mudança de variável: $T \rightarrow x$.

Agora, notemos que resolver este problema é equivalente a resolver o problema

$$F(x) = \mathbf{0},$$

onde,

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1^4 + 0.06823x_1) - (x_2^4 + 0.05848x_2) - 0.01509, \\ (x_1^4 + 0.05848x_1) - (2x_2^4 + 0.11696x_2) \end{bmatrix}$$

Para aplicar o método de Newton para resolver este problema, devemos calcular a matriz jacobiana de F , assim

$$J(x) = \begin{bmatrix} 4x_1^3 + 0.06823 & -4x_2^3 - 0.05848 \\ 4x_1^3 + 0.05848 & -8x_2^3 - 0.11696 \end{bmatrix}.$$

Sabendo do método de Newton que $J(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$. Aplicando este método a partir do ponto $x^0 = [0.30, 0.30]^t$, temos:

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$
0	$\begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.012165 \\ -0.025644 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 0.292935 \\ 0.219449 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0029 \\ -0.0058 \end{pmatrix}$

Para calcular uma estimativa do erro relativo, utilizamos:

$$\frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2}{\|x^{(1)}\|_2} = \frac{0.080860}{0.366017} = 0.220919.$$

Exercício 4.

A concentração de um poluente num lago depende do tempo t , e é dada por

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}$$

Foram feitas algumas medidas, que estão registadas na seguinte tabela:

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Utilize o método de Newton para determinar β e ω . Considere para aproximação inicial o ponto $(\beta, \omega)^0 = (-1.9, -0.15)$, efetue duas iterações e apresente uma estimativa do erro relativo.

Solução

Inicialmente, faremos a seguinte mudança de variável: $\beta \rightarrow x_1$ e $\omega \rightarrow x_2$.

Para construir as duas expressões que dão origem ao sistema, utilizamos $C(t)$ em cada um dos pontos, substituindo as respectivas constantes, obtendo:

$$\begin{cases} C(1) = 27.5702, \\ C(2) = 17.6567, \end{cases}$$

Assim, conseguimos o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} 70e^{x_1} + 20e^{x_2} = 27.5702 \\ 70e^{2x_1} + 20e^{2x_2} = 17.6567 \end{cases}$$

Agora, notemos que resolver este problema é equivalente a resolver o problema

$$F(x) = \mathbf{0},$$

onde,

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 70e^{x_1} + 20e^{x_2} - 27.5702 \\ 70e^{2x_1} + 20e^{2x_2} - 17.6567 \end{bmatrix}$$

Para aplicar o método de Newton para resolver este problema, devemos calcular a matriz jacobiana de F , assim

$$J(x) = \begin{bmatrix} 70e^{x_1} & 20e^{x_2} \\ 140e^{2x_1} & 40e^{2x_2} \end{bmatrix}.$$

Sabendo do método de Newton que $J(x^{(k)}) (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$. Aplicando este método a partir do ponto $x^0 = [-1.9, -0.15]^t$, temos:

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\frac{\ x^{k+1} - x^{(k)}\ _2}{\ x^{k+1}\ _2}$
0	$\begin{pmatrix} -1.9 \\ -0.15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.113763 \\ -1.274382 \end{pmatrix}$	—
1	$\begin{pmatrix} -1.998732 \\ -0.096559 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.074416 \\ 0.116342 \end{pmatrix}$	0.056104
2	$\begin{pmatrix} -2.000014 \\ -0.099987 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000120 \\ 0.000399 \end{pmatrix}$	0.001828

Assim, valores de β e ω são:

$$\beta \approx -2.000014 \quad \text{e} \quad \omega \approx -0.099987.$$

Exercício 5.

Para combater um vírus que infectou um grupo de indivíduos será administrado um composto químico sintetizado com base em duas substâncias elementares x_1 e x_2 . Sabe-se que se forem administrados α miligramas de composto a cada indivíduo, a concentração (mg/L) de cada uma das substâncias elementares na circulação sanguínea é dada implicitamente (para $\alpha \in [0, 5]$) pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} 16x_1 - \cos[\alpha(x_2 - 2x_1)] &= 0, \\ 16x_2 + 0.75\sin[\alpha(-x_2 - 3x_1)] &= 0. \end{cases}$$

Para $\alpha = 1$, determine x_1 e x_2 usando o método iterativo mais adequado. Use a seguinte aproximação inicial $x^0 = (0.1, 0.01)^t$ e termine o processo iterativo considerando $\varepsilon_2 = 0.05$.

Solução

Notemos que resolver este problema é equivalente a resolver o problema

$$F(x) = \mathbf{0},$$

onde, (aqui tomamos $\alpha = 1$)

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 16x_1 - \cos(x_2 - 2x_1) \\ 16x_2 + 0.75\sin(-x_2 - 3x_1) \end{bmatrix}$$

Para aplicar o método de Newton para resolver este problema, devemos calcular a matriz jacobiana de F , assim

$$J(x) = \begin{bmatrix} 16 - 2\sin(x_2 - 2x_1) & \sin(x_2 - 2x_1) \\ -2.25 \cos(-x_2 - 3x_1) & 16 - 0.75 \cos(-x_2 - 3x_1) \end{bmatrix}.$$

Sabendo do método de Newton que $J(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$. Aplicando este método a partir do ponto $x^0 = [0.1, 0.01]^t$, temos:

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\ F(x^{(k)})\ _2$
0	$\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.617996 \\ -0.068794 \end{pmatrix}$	—
1	$\begin{pmatrix} 0.062257 \\ 0.009210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.002752 \\ 0.001313 \end{pmatrix}$	0.003049

Paramos, pois $\|F(x^{(1)})\|_2 = 0.003049 < 0.05$. O processo iterativo termina e a concentração das substâncias elementares é $x \approx \begin{pmatrix} 0.062257 \\ 0.009210 \end{pmatrix} mg/L$.