

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211

Tópico 3. “Resolução de sistemas lineares”

Exercício 1.

Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Considere o problema de encontrar uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $AX = B$.

- (a) Verifique que resolver $AX = B$ é equivalente a resolver m sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes.
- (b) Considere um sistema linear da forma $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$. O escalonamento da matriz aumentada para obter a forma triangular superior requer aproximadamente $2/3n^3$ flops (operações na aritmética de ponto flutuante). Portanto a decomposição de A na forma $A = LU$ também custa aproximadamente $2/3n^3$ flops. A resolução de um sistema triangular custa aproximadamente n^2 flops. Dado estes fatos, você escolheria Eliminação Gaussiana ou a Decomposição LU para resolver $AX = B$ com $n = 9$ e $m = 3$?

Solução

Item (a).

Notemos que

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\begin{bmatrix} A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} & A \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} & \dots & A \cdot \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \quad A \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A \cdot \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, mostramos o pedido.

Item (b).

Resolver um sistema linear $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ custa aproximadamente

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3}_{\text{Escalona a matriz aumentada}} + \underbrace{n^2}_{\text{Resolver o S.L. triangular superior}} = \frac{2}{3}n^3 + n^2 \text{ flops},$$

utilizando a Eliminação Gaussiana, e

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3}_{\text{Calcular } L \text{ e } U} + \underbrace{2n^2}_{\text{Resolver 2 S.L. triangulares}} = \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 \text{ flops},$$

utilizando Decomposição LU .

Então, resolver $AX = B$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ custa aproximadamente $m \left(\frac{2}{3}n^3 + n \right)$ flops utilizando Eliminação Gaussiana e $\frac{2}{3}n^3 + 2mn$ flops utilizando Decomposição LU .

Se $m = 3$ e $n = 9$, temos que a Eliminação custaria 1701 flops e a Decomposição LU custaria 972 flops. Portanto a escolha correta para resolver $AX = B$ seria a Decomposição LU .

Exercício 2.

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Escolha um método iterativo para resolver $Ax = b$ de modo que a convergência para solução x^* seja garantida para qualquer chute inicial. Justifique a sua resposta.
- (b) Aplique o método escolhido com um chute inicial $x^0 \in \mathbb{Z}^3$ de sua escolha. Pare quando $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 0.05$.

Solução

Item (a).

Aplicando o Critério de Sassenfeld a matriz A , temos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{2+5}{10} = 0,7; \\ \beta_2 &= \frac{\beta_1 \cdot 0 + 0}{1} = 0; \\ \beta_3 &= \frac{\beta_1 \cdot 1,5 + \beta_2 \cdot 3}{4} = 0,2625. \end{aligned}$$

Logo, temos $|\beta_1| < 1$, $|\beta_2| < 1$ e $|\beta_3| < 1$, assim o Critério de Sassenfeld é satisfeito, então o Método de Gauss-Seidel converge para qualquer $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Assim podemos aplicar o Método de Gauss-Seidel para resolver $Ax = b$, e temos que a convergência é garantida.

Item (b).

Aplicando o Método de Gauss-Seidel a partir do ponto inicial $x^0 = (0, 1, -1)^t$, temos:

k	$x^{(k)}$	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ _\infty$
0	$(0, 1, -1)^t$	—
1	$(0.1, 1, -1.0445)^t$	0.1
2	$(0.1188, 1, -1.0445)^t$	0.01188

Paramos em $k = 2$, pois $\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = 0.01188 < 0.05$.

Exercício 3.

Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Para quais valores de α , a matriz A pode ser decomposta em um produto LU (sem pivoteamento)? Justifique.
- (b) Resolva o sistema para $\alpha = 2$.

Solução

Item (a).

O primeiro passo da decomposição LU sempre pode ser feito, pois obtemos:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \alpha & 1 & \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 4 - 3\alpha \\ 0 & 2 - 5\alpha & -14 \end{bmatrix}.$$

Para fazer o segundo e último passo temos de ter $1 - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm 1$. Assim a podemos fazer a Decomposição LU desde que $\alpha \neq \pm 1$.

Item (b).

Para $\alpha = 2$, temos

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow U_2 = U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -26/3 \end{bmatrix} \text{ e } L_2 = L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 5 & 8/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, temos:

$$Ax = b \Leftrightarrow L U x = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases},$$

resolvendo os sistemas acima, temos:

$$y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 34/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} 0.8466 \\ 0.5387 \\ -1.3080 \end{bmatrix}.$$

Logo a solução do sistema $Ax = b$, com $\alpha = 2$ é $x = (0.8466, 0.5387, -1.3080)^t$.

Exercício 4.

Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Diga se é possível aplicar o método de Gauss-Jacobi para o sistema acima, ou algum sistema equivalente a ele, de modo a garantir a convergência. Justifique.
- (b) Aplique o método de Jacobi ao sistema partindo do ponto $x_0 = [1, -0.5, -1]^t$ até $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$.
- (c) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema partindo do mesmo ponto acima, até $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$.

Obs.: Caso a resposta ao item (a) acima seja negativa, realize as iterações no sistema original. Se a resposta for positiva, realize as iterações no sistema para o qual a convergência está garantida.

Solução

Item (a).

Para o sistema original não há garantia de convergência do Método de Gauss-Jacobi, mas se trocarmos as primeiras duas equações de lugar, temos

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, temos que $\tilde{A}$ é diagonalmente dominante por linhas e portanto temos que o Critério das Colunas é satisfeito e portanto o Método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema linear $Ax = b$ converge para qualquer $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Item (b).

Aplicando o Método de Gauss-Jacobi a partir do ponto inicial $x^0 = (1, -0.5, -1)^t$, no sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$, temos:

k	$x^{(k)}$	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ _\infty$
0	$(1, -0.5, -1)^t$	—
1	$(0.8750, -0.5000, -1.0000)^t$	0.1250
2	$(0.8750, -0.4688, -1.0000)^t$	0.0313
3	$(0.8672, -0.4688, -0.9750)^t$	0.0250
4	$(0.8547, -0.4605, -0.9750)^t$	0.0125
5	$(0.8526, -0.4574, -0.9684)^t$	0.0066

Paramos em $k = 5$, pois $\|x^{(5)} - x^{(4)}\|_\infty = 0.0066 < 10^{-3}$.

Item (c).

Aplicando o Método de Gauss-Seidel a partir do ponto inicial $x^0 = (1, -0.5, -1)^t$, no sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$, temos:

k	$x^{(k)}$	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ _\infty$
0	$(1, -0.5, -1)^t$	—
1	$(0.8750, -0.4688, -0.9750)^t$	0.1250
2	$(0.8547, -0.4574, -0.9659)^t$	0.0203
3	$(0.8473, -0.4533, -0.9627)^t$	0.0074

Paramos em $k = 3$, pois $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 0.0074 < 10^{-3}$.

Exercício 5.

Resolva os itens abaixo

- (a) Justifique se for verdadeira ou dê contra-exemplo se for falsa a afirmação: “Dada uma matriz $A : n \times n$, sua fatoração LU , obtida com estratégia de pivoteamento parcial, é tal que todos os elementos da matriz L têm módulo menor ou igual a 1”.
- (b) Verifique que $|\det(A)| = |\det(U)|$, onde U é a matriz triangular superior da fatoração $PA = LU$.

Solução

Item (a).

A afirmação é verdadeira pois se $L = [\ell_{i,j}] \forall i, j = 1, \dots, n$, onde

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{se } i > j, \\ 0 & \text{se } i < j, \end{cases}$$

e como estamos utilizando a estratégia de pivoteamento parcial que a_{ii} é escolhido de forma que $a_{ii} > a_{ij} \forall i, j$, logo $\frac{a_{ij}}{a_{ii}} < 1$, logo $m_{i,j} < 1 \forall i, j$. Assim, concluímos que $\ell_{ij} \leq 1 \forall i, j = 1, \dots, n$, o que justifica a afirmação feita.

Item (b).

Note que $PA = LU$, logo $\det(PA) = \det(LU) \Leftrightarrow \det(P) \det(A) = \det(L) \det(U) =$

$$\prod_{i=1}^n 1 \det(U) = 1 \det(U) = \det(U) \therefore \det(P) \det(A) = \det(U).$$

Mas $\det(P) = \pm 1$, logo $|\det(PA)| = |\det(LU)| \Leftrightarrow |\det(P) \det(A)| = |\det(U)| \Leftrightarrow |\pm \det(A)| = |\det(U)| \Leftrightarrow |\det(A)| = |\det(U)|$.

Portanto $|\det(A)| = |\det(U)|$.