

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211

Tópico 2. “Zeros reais de funções reais”

Exercício 1.

Localize graficamente os zeros das funções a seguir:

(a) $f(x) = 4 \cos(x) - \exp(2x)$;

(b) $f(x) = x/2 - \tan(x)$;

(c) $f(x) = 1 - x \ln x$;

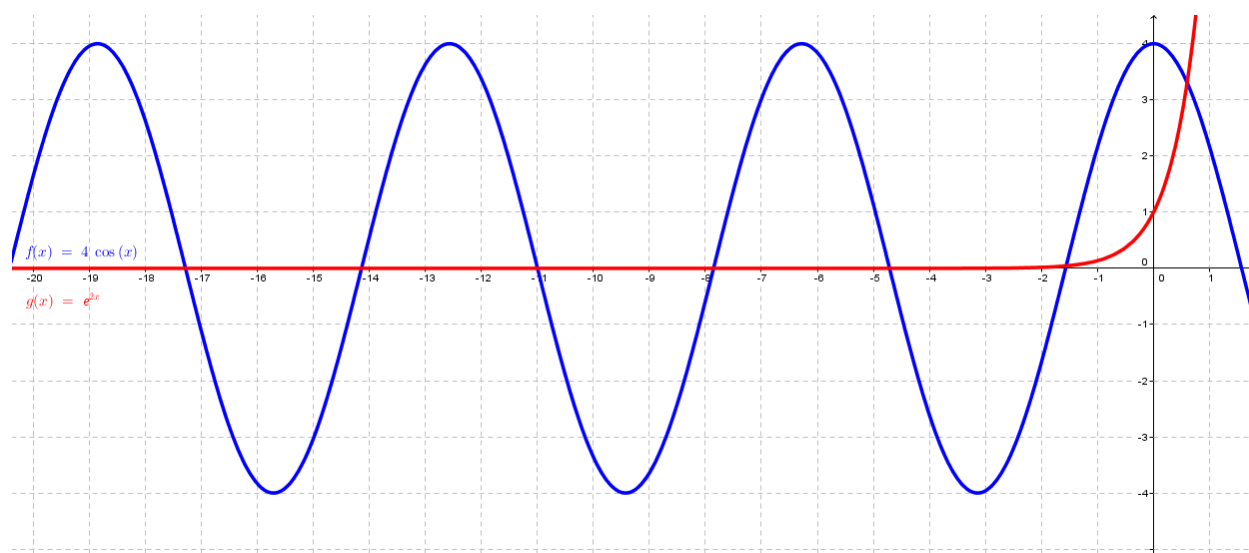
(d) $f(x) = 2^x - 3x$;

(e) $f(x) = x^3 + x - 1000$.

Solução

Item (a).

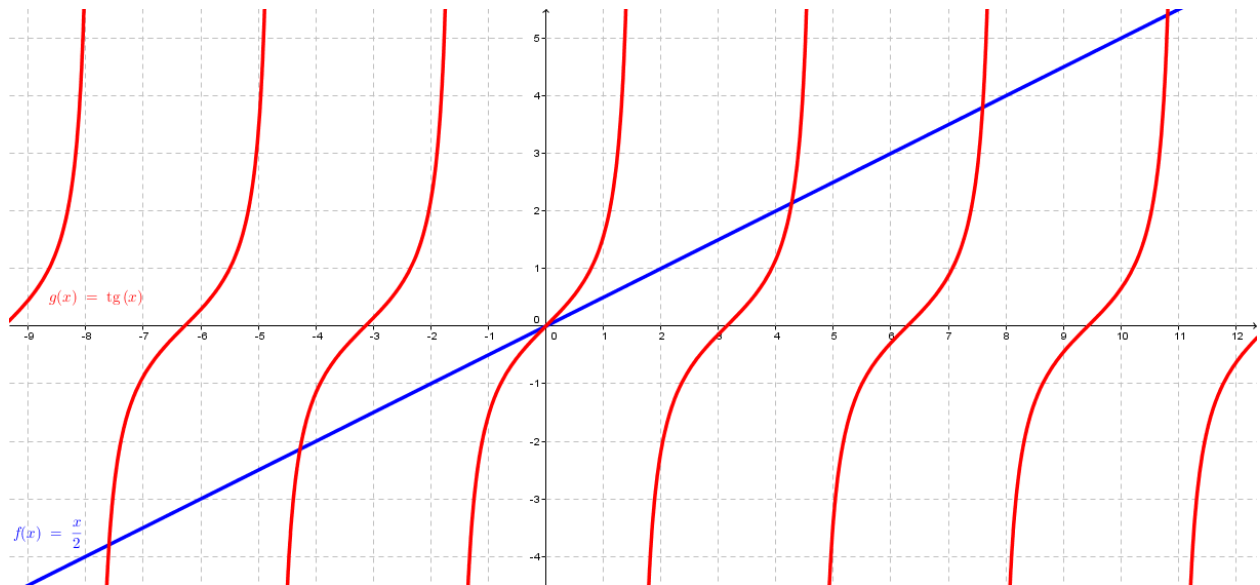
Os zeros de f são dados nos pontos de intersecção dos dois gráficos apresentados na figura abaixo.



Notamos que, neste caso, f tem infinitos zeros, e os intervalos que contêm tais zeros podem ser identificados graficamente.

Item (b).

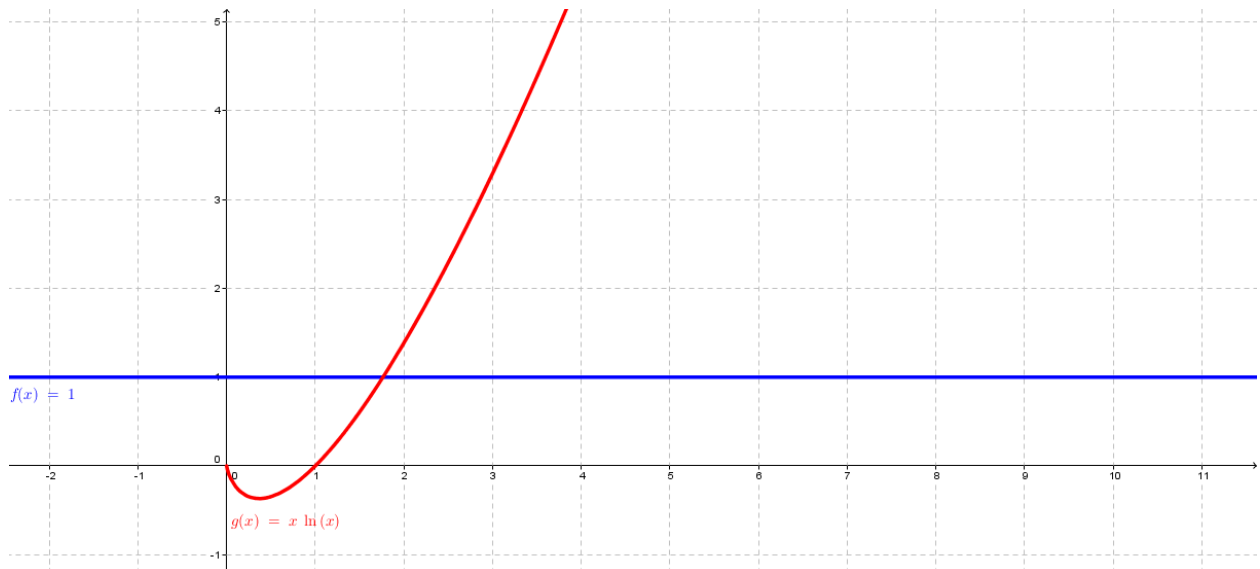
Os zeros de f são dados nos pontos de intersecção dos dois gráficos apresentados na figura abaixo.



Notamos que, neste caso, f tem infinitos zeros, e os intervalos que contêm tais zeros podem ser identificados graficamente.

Item (c).

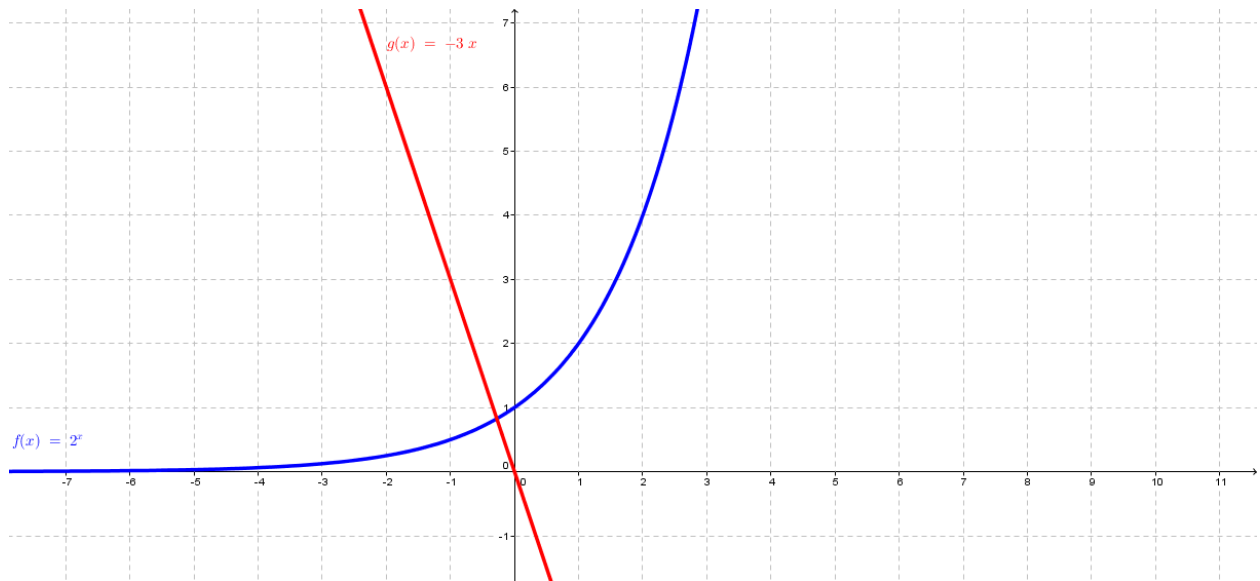
Os zeros de f são dados nos pontos de intersecção dos dois gráficos apresentados na figura abaixo.



Notamos que, neste caso, f tem um único zero, e o intervalo que contém tal zero pode ser identificado graficamente.

Item (d).

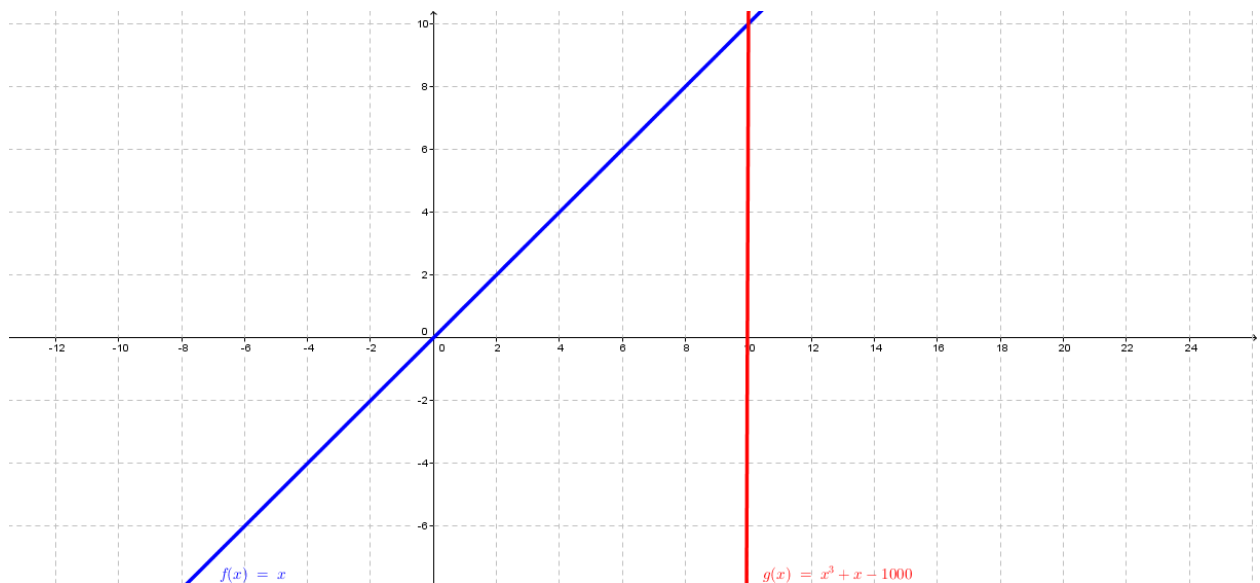
Os zeros de f são dados nos pontos de intersecção dos dois gráficos apresentados na figura abaixo.



Notamos que, neste caso, f tem um único zero, e o intervalo que contém tal zero pode ser identificado graficamente.

Item (e).

Os zeros de f são dados nos pontos de intersecção dos dois gráficos apresentados na figura abaixo.



Notamos que, neste caso, f tem um único zero, e o intervalo que contém tal zero pode ser identificado graficamente.

Exercício 2.

Considere a seguinte equação não-linear:

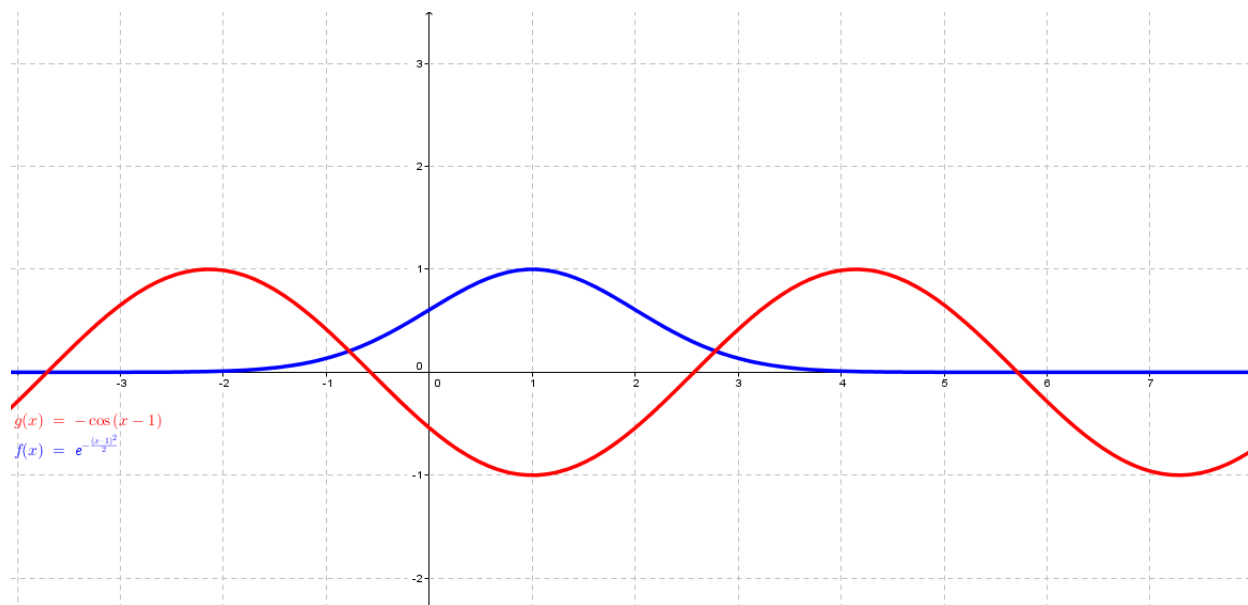
$$\exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2}\right] = -\cos(x-1).$$

- (a) Quantas soluções existem, na reta $\mathbb{R}$? Justique a sua resposta através de um gráfico.
- (b) Considere os pontos 0, 1 e 2 como possíveis escolhas de chutes iniciais. Podemos aplicar o Método de Newton para encontrar uma aproximação de uma solução escolhendo qualquer um destes pontos como chute inicial?
- (c) Aplique o Método de Newton para encontrar $\tilde{\xi} \approx \xi$, onde ξ é uma raiz da equação não-linear. Utilize um chute inicial permissível em $\{0, 1, 2\}$ e precisões $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$. Qual é o valor de ξ encontrado?

Solução

Item (a).

Os zeros de $f(x) = \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2}\right] + \cos(x-1)$ são dados nos pontos de intersecção dos dois gráficos apresentados na figura abaixo.



Notamos que, neste caso, f tem infinitos zeros, e os intervalos que contêm tais zeros podem ser identificados graficamente.

Item (b).

Notemos que

$$f'(x) = -(x-1) \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2}\right] - \sin(x-1),$$

assim, temos $f'(0) \neq 0$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) \neq 0$. Portanto podemos aplicar o Método de Newton a partir dos pontos $x_0 = 0$ ou $x_0 = 2$.

Item (c).

Do Método de Newton, sabemos que $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, aplicando este método a partir do ponto inicial $x_0 = 0$, temos:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	$f(x_k)$
0	0	—	1.1468
1	-0.7920	0.1250	-0.0187
2	-0.7780	0.0140	0.0001
3	-0.7780	0.0000	0.0001

Logo para $k = 3$, temos $|x_3 - x_2| = 0.0000 < 10^{-3}$ e $|f(x_3)| = 0.0001 < 10^{-3}$. Assim temos que $\tilde{\xi} = -0.7780$ é uma aproximação para a ξ .

Exercício 3.

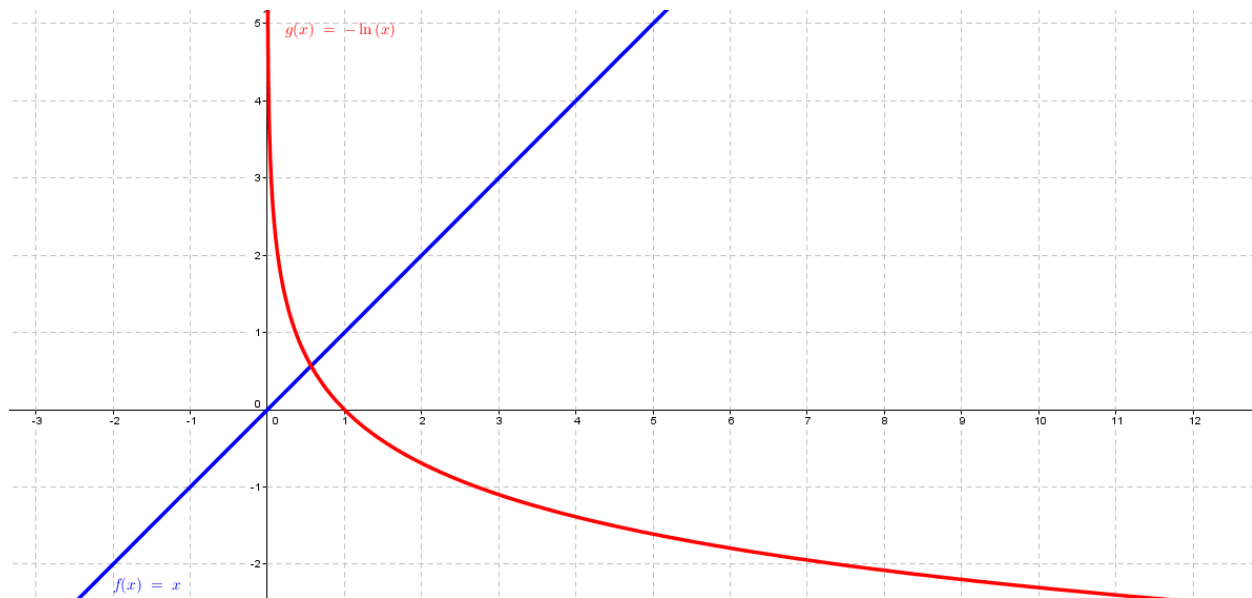
Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{2} + x(\ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio do método das secantes, com precisão de duas casas decimais.

Solução

Sabemos que os pontos críticos de f são dados quando $f'(x) = 0$. Notemos que

$$f'(x) = x + \ln(x)$$

assim, os zeros de f' são dados nos pontos de intersecção dos dois gráficos apresentados na figura abaixo.



Notamos que, neste caso, f' tem um único zero, e o intervalo que contém tal zero pode ser identificado graficamente.

Do Método das Secantes, sabemos que $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$, aplicando este método a partir do ponto inicial $x_0 = 0.2$ e $x_1 = 0.3$, temos:

k	x_{k-1}	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	$f(x_k)$
1	0.2000	0.3000	0.1000	-0.9040
2	0.3000	0.4788	0.1788	-0.2575
3	0.4788	0.5501	0.0713	-0.04757
4	0.5501	0.5662	0.0161	-0.0025
5	0.5662	0.5671	0.0009	-0.0000

Logo para $k = 5$, temos $|x_5 - x_4| = 0.0009 < 10^{-3}$ e $|f(x_5)| = 0.0000 < 10^{-3}$. Assim temos que $x^* = 0.5671$ é uma aproximação para o zero de f' . Assim, $x = 0.5671$ é uma aproximação do ponto crítico de f .

Exercício 4.

Descreva um método iterativo para encontrar a raiz quadrada de um número r tal que $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, utilizando o método de Newton. Utilizando o método que você encontrou para encontrar o valor de $\sqrt{7}$ com precisão de 4 casa decimais.

Solução

Para utilizarmos o Método de Newton para resolver este problema precisamos encontrar uma função f a qual queremos encontrar os zeros desta função, e encontrar o zero desta função tem de ser equivalente a encontrar o valor de $\sqrt{r}$. Assim:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{r} \Leftrightarrow x^2 = r \Leftrightarrow x^2 - r = 0,$$

daí concluímos que

$$f(x) = x^2 - r.$$

Agora, aplicando o Método de Newton a esta função, temos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - r}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{r}{x_k} \right).$$

Logo, se quisermos encontrar a raiz quadrada de um número r maior que zero, basta aplicar o método

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{r}{x_k} \right),$$

a partir de algum $x_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Agora, aplicando o método encontrado acima para encontrar o valor de $\sqrt{7}$, aplicando este método a partir do ponto inicial $x_0 = 2.5$, temos:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	x_{k+1}
0	2.50000	—	2.6500
1	2.65000	0.15000	2.64575
2	2.64575	0.00425	2.64575
3	2.64575	0.00000	2.64575

Logo para $k = 3$, temos $|x_3 - x_2| = 0.00000 < 0.0001$. Assim temos que $x^* = 2.64575$ é uma aproximação para a $\sqrt{7}$ com quatro casas decimais.

Exercício 5.

Prove que $f(x)$, onde

$$f(x) = \left(2 + \frac{x}{8}\right)^4 - 3 \left(1.5 - \frac{x}{17}\right)^2,$$

tem pelo menos uma raiz. Determine um intervalo fechado de comprimento máximo 1 contendo um zero de f pelo Método da Bissecção.

Solução

Vamos calcular $f(-16)$, pois $x = -16$ zera a parte positiva de f por este motivo saberemos que $f(-16) < 0$, de fato $f(-16) = -7.3235 < 0$. Notemos agora que $x = 0$ é um ponto fácil de calcular o valor de f e facilmente vemos que $f(0) > 0$, de fato $f(0) = 11.5 > 0$.

Logo, $f(-16) < 0$ e $f(0) > 0$, e como f é contínua, sabemos que existe pelo menos um ponto $x^* \in [-16, 0]$ tal que $f(x^*) = 0$. Assim, provamos que f tem ao menos uma raiz.

Agora vamos aplicar o Método da Bissecção procurando o zero de f no intervalo $I = [-16, 0]$, e o critério de parada para este método será quando $|b_k - a_k| < 1$, onde a_k é o extremo esquerdo do intervalo e b_k é o extremo direito do intervalo.

k	a_k	$f(a_k)$	b_k	$f(b_k)$	m_k	$f(m_k)$
1	-16	-7.32350	0	11.50000	-8	-4.91180
2	-8	-4.91180	0	11.50000	-4	-0.14338
3	-4	-0.14338	0	11.50000	-2	4.52600
4	-4	-0.14338	-2	4.52600	-3	1.94350
5	-4	-0.14338	-3	1.94350	-3.5	-2.76964

Logo para $k = 5$, temos $|b_5 - a_5| = 1$, É um intervalo de tamanho 1 que contém uma raiz de f .