

MS 211 Cálculo Numérico

Proposta para o Segundo Semestre de 2015

Lista de Exercícios MS211

Tópico 1. “Erros nas representações de números reais”

Exercício 1.

Avalie as expressões abaixo em um sistema de ponto flutuante com cinco dígitos significativos. Ao final calcule o erro relativo com o valor obtido na sua calculadora, utilizando arredondamento.

(a) $72126 + 24.821 - 72160$

(b) $1000 + \sum_{n=1}^{25000} 0.4$

(c) $\sum_{n=1}^{25000} 0.4 + 1000$

Solução

O segredo aqui é fazer cada operação com precisão mais alta, por exemplo na calculadora, e depois arredondar.

Para este exercício, seja x^* o valor real da expressão dada e $\bar{x}$ o valor da expressão obtido na aritmética de ponto flutuante deste sistema de 5 dígitos.

Item (a).

Aqui, temos:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 72126 + 24.821 - 72160 \\ &= 72150.821 - 72160 \\ &= 72151 - 72160 \\ &= -9\end{aligned}$$

Logo $\bar{x} = -9$. O valor real da expressão é dado por $x^* = -9,179$, assim o Erro relativo é dado por

$$E_{\text{rel}} = \frac{|x^* - \bar{x}|}{x^*} = 1.9501 \times 10^{-2}.$$

Item (b).

Primeiro, observe que, fazendo as primeiras contas, os valores vão sendo exatamente representados. Tudo vai bem até n atingir o valor 22500. Nesse momento, temos

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 9999.6 + 0.4 + \sum_{n=22501}^{25000} 0.4 \\ &= 10000 + \sum_{n=22501}^{25000} 0.4\end{aligned}$$

A partir daí o 0.4 entra na sexta casa decimal e é ignorado depois do arredondamento. O valor então estabiliza em $\bar{x} = 10000$.

Notemos que o valor real da expressão é dado por $x^* = 11000$, assim o Erro relativo é dado por

$$E_{\text{rel}} = \frac{|x^* - \bar{x}|}{x^*} = 9.0909 \times 10^{-2}.$$

Item (c).

Aqui os 0.4 são somados inicialmente gerando números sempre representáveis, assim

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \left(\sum_{n=1}^{25000} 0.4 \right) + 1000 \\ &= 1000 + 10000 \\ &= 11000\end{aligned}$$

Logo $\bar{x} = 11000$. O valor real da expressão é dado por $x^* = 11000$, assim o Erro relativo é dado por

$$E_{\text{rel}} = \frac{|x^* - \bar{x}|}{x^*} = 0.$$

Exercício 2.

Considere um sistema de ponto flutuante $F(10, 8, -14, -15)$.

- (a) Determine o menor número positivo representável nesta máquina.
- (b) Determine o maior número positivo representável nesta máquina.
- (c) Determine a região de *overflow* e *underflow* desta máquina.

Solução

Item (a).

Sabemos que o menor número representado nesta máquina é dado por $mN = 0.10000000 \times 10^{-14}$.

Item (b).

Sabemos que o maior número representado nesta máquina é dado por $MN = 0.99999999 \times 10^{14}$.

Item (c).

Pelas respostas dos itens (a) e (b), temos que a região de *underflow* é dada por $|x| < mN$ e a região de *overflow* é dada por $|x| > MN$.

Exercício 3.

Em uma calculadora aproxima-se o valor de e^x , para todo $x \in [-1, 1]$, pelo valor do polinômio de Taylor de grau 3, obtido através da expansão de e^x em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$.

- (a) Qual a aproximação de $e^{0.5}$ fornecida pela calculadora?
- (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função e x pela sua expansão em série de Taylor, forneça um limitante superior para o erro cometido no item.

Solução

Item (a).

Notemos que $f(x) = e^x \approx P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$, onde $x_0 = 0$. Assim para $x = 0.5$, temos $e^{0.5} \approx P_3(0.5) = 1.6458$.

Item (b).

Neste caso, sabemos que o limitante para o erro é dado por $R_3(x) \leq \max_{\xi \in [-1, x]} \frac{|f^{(iv)}(\xi)|}{4!} (x - x_0)^4$.

Substituindo os valores, temos que $R_3(0.5) \leq \frac{e^{0.5}}{24} \cdot (0.5)^4 \approx 4.29 \times 10^{-3}$.

Exercício 4.

Usando a série de Taylor, determine o valor aproximado e o limitante superior do erro, utilizando 4 dígitos significativos, para o cálculo de $\sin(47^\circ)$, em torno do ponto $x_0 = (45^\circ)$, com polinômios de grau

(a) $n = 2$;

(b) $n = 3$;

(c) Usando o polinômio de grau $n = 2$ e o erro associado, calcule $\int_0^{47^\circ} \sin(x) dx$, sabendo que o valor “exato” é $I = 0.318001641$.

Solução

Item (a).

Para $n = 2$, temos que $f(x) = \sin(x) \approx P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$, onde $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$. Assim para $x = 47^\circ = \frac{47\pi}{180} \text{ rad}$, temos:

$$\sin\left(\frac{47\pi}{180}\right) \approx P_2\left(\frac{47\pi}{180}\right) = 0.73135867.$$

Item (b).

Para $n = 3$, temos que $f(x) = \sin(x) \approx P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$, onde $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$. Assim para $x = 47^\circ = \frac{47\pi}{180} \text{ rad}$, temos:

$$\sin\left(\frac{47\pi}{180}\right) \approx P_3\left(\frac{47\pi}{180}\right) = 0.73135366.$$

Item (c).

O exercício nos diz que $I = \int_0^{47\pi/180} \sin(x) dx = 0.318001641$. Sabemos que o erro de aproximação é dado por

$$E = \left| \int_0^{47\pi/180} \sin(x) dx - \int_0^{47\pi/180} P_2(x) dx \right|.$$

Logo $E = |I - 0.73135867| = 0.012718015$.

Exercício 5.

Verifica-se que a série de Taylor da função e^x em torno de $x_0 = 0$ é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots \quad (1)$$

As somas parciais $S_n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ podem ser usadas para calcular aproximações para o valor de e^{-5} de dois modos:

- (a) Tomando $x = -5$ em (??);
- (b) Tomando $x = 5$ em (??) e lembrando que $e^{-5} = 1/e^5$;
- (c) Compare estes dois procedimentos com $n = 10$. Compare também seus resultados com o valor de e^{-5} da calculadora.

Solução

Item (a).

Neste caso, temos $V_{(a)} = e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{10} \frac{(-5)^i}{i!} = 0.864039$.

Item (b).

Neste caso, temos $V_{(b)} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$ e $e^5 \approx \sum_{i=0}^{10} \frac{(5)^i}{i!} = 146.380601$, logo $V_{(b)} = e^{-5} \approx \frac{1}{146.380601} \approx 0.006831$.

Item (c).

Utilizando uma calculadora, temos $V_{(c)} = 0.006738$. Assim, notamos que o procedimento realizado em (b) é melhor se $n = 10$.