

1.(a)	1.(b)	2.(a)	2.(b)	3.(a)	3.(b)	Σ

Lista L_5 de MA044 — 04/11/2014

NOME: **WAGNER DA ROCHA - GABARITO** Turma: **X/Y RA: 118955**

1. Para a função $f(z) = \frac{1}{iz^2 + 3z - 2i}$, calcule:

(a) A série de Taylor para o disco $|z| < 1$.

Solução: As raízes de $iz^2 + 3z - 2i = 0$ são $z = i$ e $z = 2i$, logo

$$iz^2 + 3z - 2i = i(z-i)(z-2i) \implies f(z) = \frac{1}{iz^2 + 3z - 2i} = -i \frac{1}{(z-i)(z-2i)}.$$

Por frações parciais,

$$f(z) = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z-2i}.$$

Para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i \left(1 - \frac{z}{i}\right)} = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n,$$

e

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{-2i \left(1 - \frac{z}{2i}\right)} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^n.$$

Assim,

$$f(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^n, \quad |z| < 1.$$

(b) A série de Laurent para o anel $1 < |z| < 2$.

Solução: No anel $1 < |z| < 2$, expandimos

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n, \quad |z| > 1,$$

e mantemos

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^n, \quad |z| < 2.$$

Logo, para $1 < |z| < 2$,

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^n - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^n.$$

2. Para a função $f(z) = \frac{\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)}{(z^2+1)^3(z^4+8z)}$

(a) Determine e classifique todas as singularidades isoladas de $f(z)$.

Solução: Fatorando o denominador:

$$(z^2+1)^3 = (z-i)^3(z+i)^3, \quad z^4+8z = z(z+2)(z-(1+\sqrt{3}i))(z-(1-\sqrt{3}i)).$$

Assim,

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)}{z(z+i)^3(z-i)^3(z+2)(z-(1+\sqrt{3}i))(z-(1-\sqrt{3}i))}.$$

Portanto, os pontos $z = 0, -i, -2, 1 \pm \sqrt{3}i$ são polos (com $z = -i$ de ordem 3) e $z = i$ é uma singularidade essencial (pois $\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)$ tem singularidade essencial em $z = i$).

(b) Calcule o integral $\int_{\gamma} f(z) dz$, onde γ é o caminho definido com base na elipse de equação $|z-2-i| + |z-i| = 2\sqrt{2}$.

Solução: A curva γ é uma elipse com focos em $F_1 = i$ e $F_2 = 2+i$, centro em $C = (1,1)$ e semieixo maior $a = \sqrt{2}$. Como $2c = \text{dist}(F_1, F_2) = 2$, temos $c = 1$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 2 - 1 = 1$, isto é, $b = 1$. Logo, uma parametrização é

$$\gamma: \quad z(t) = (1 + \sqrt{2} \cos t) + i(1 + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nessa elipse, os pontos $z = i$ e $z = 1 + \sqrt{3}i$ estão no interior. Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 1 + \sqrt{3}i) \right).$$

Como $z = 1 + \sqrt{3}i$ é polo simples,

$$\text{Res}(f, 1 + \sqrt{3}i) = \frac{\cos\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}+i}\right)}{-840 + 432\sqrt{3}i}.$$

Além disso, $\text{Res}(f, i) = a_{-1}$, onde a_{-1} é o coeficiente do termo $(z-i)^{-1}$ na série de Laurent de f em torno de $z = i$. Assim,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left[\frac{\cos\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}+i}\right)}{-840 + 432\sqrt{3}i} + a_{-1} \right].$$

3. Use a teoria dos resíduos para calcular os seguintes integrais:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$

Solução: Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz \right).$$

Usando uma curva semicircular no semiplano superior e o Teorema dos Resíduos, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi,$$

e portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \operatorname{Im}(i\pi) = \pi.$$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(x) + \sin^2(x)} dx$, onde $a > 1$.

Solução: Fazendo $z = e^{i\theta}$, temos $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ e $d\theta = \frac{dz}{iz}$.

Defina $p = \frac{a-1}{a+1}$ (note que $0 < p < 1$ pois $a > 1$). O integral se reduz a um integral no círculo $|z| = 1$ e, pelo Teorema dos Resíduos, as contribuições vêm dos polos em $z = \pm i\sqrt{p}$, resultando em

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(x) + \sin^2(x)} dx = \frac{2\pi}{a}.$$

Observações:

- Na resolução da lista deverá incluir todos os cálculos que realizou para chegar à solução. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.
- O enunciado da lista deverá ser impresso, devidamente preenchido (Nome, Turma e RA) e entregue com a resolução da lista.
- 15 de Dezembro de 2014 é a data limite para entrega da lista resolvida.
- Não entrega da lista de exercícios na data limite conta como zero (0).

Bom Trabalho!