

1.(a)	1.(b)	2.(a)	2.(b)	2.(c)	2.(d)	Σ

Lista L_4 de MA044 — 18/11/2014

NOME: **WAGNER DA ROCHA - GABARITO** Turma: **X/Y RA: 118955**

1. Seja $f(z)$ uma função inteira, tal que, para todo o $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| < |z|e^{-|z|}$.

(a) Mostre que $f(z)$ é a função constante.

Solução: Por hipótese, f é inteira e $|f(z)| < |z|e^{-|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Considere a função auxiliar $g(r) = re^{-r}$, $r \geq 0$. Temos

$$g'(r) = (1 - r)e^{-r} = 0 \iff r = 1,$$

e como $g''(1) = -e^{-1} < 0$, $r = 1$ é ponto de máximo. Assim $g(r) \leq g(1) = e^{-1}$. Logo,

$$|f(z)| < |z|e^{-|z|} \leq e^{-1} \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

ou seja, f é limitada e inteira. Pelo Teorema de Liouville, f é constante.

(b) Mostre que $f(z) = 0$.

Solução: Do item (a), f é constante. Tomando $z = 0$ e usando a fórmula integral de Cauchy,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta,$$

logo

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{-r} d\theta = re^{-r}.$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos $|f(0)| \leq 0$, isto é, $f(0) = 0$. Como f é constante, segue que $f \equiv 0$.

2. Encontre a série de Taylor, em torno de $z = 0$, das seguintes funções:

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

Solução: Este exercício foi anulado, pois para $f(z) = \frac{1}{z^2}$ não temos série de Taylor em torno do ponto $z = 0$. Porém, se considerarmos a expansão em torno de $z = 1$ (isto é, $w = z - 1$), podemos escrever

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) w^n, \quad |w| < 1.$$

(b) $f(z) = \cos(2z)$.

Solução: Como $\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$, temos

$$\cos(2z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

(c) $f(z) = \frac{1}{(4-3z)^2}$.

Solução: Escrevendo

$$f(z) = \frac{1}{(4-3z)^2} = \frac{1}{16} \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}z\right)^2},$$

e usando que $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ para $|w| < 1$, obtemos

$$\frac{1}{(4-3z)^2} = \frac{1}{16} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}z} \right) = \frac{1}{16} \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}z \right)^n \right), \quad \left| \frac{3}{4}z \right| < 1.$$

Assim,

$$\frac{1}{(4-3z)^2} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{3}{4} \right)^n z^n, \quad |z| < \frac{4}{3}.$$

(d) $f(z) = \text{Ln}(z^2 + 1)$.

Solução: Note que

$$\ln(1+z^2) = \ln(1-(-z^2)) = \int \frac{2z}{1+z^2} dz = 2 \int z \cdot \frac{1}{1-(-z^2)} dz.$$

Como $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ para $|w| < 1$, segue que

$$\ln(1+z^2) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int z^{2n+1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2(n+1)}, \quad |z| < 1.$$

Observações:

- Na resolução da lista deverá incluir todos os cálculos que realizou para chegar à solução. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.
- O enunciado da lista deverá ser impresso, devidamente preenchido (Nome, Turma e RA) e entregue com a resolução da lista.
- 27 de Novembro de 2014 é a data limite para entrega da lista resolvida.
- Não entrega da lista de exercícios na data limite conta como zero (0).

Bom Trabalho!