

1.(a)	1.(b)	1.(c)	2.	3.(a)	3.(b)	3.(c)	4.(a)	4.(b)	4.(c)	Σ

Lista L_3 de MA044 — 06/11/2014

NOME: **WAGNER DA ROCHA - GABARITO** Turma: **X/Y RA: 118955**

1. Sejam γ_1 e γ_2 dois caminhos que ligam os pontos $-i$ e i parametrizados por $z = e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ e $z = (-1 + 2t)i$, $0 \leq t \leq 1$, respectivamente.

(a) Calcule as integrais complexas $\int_{\gamma_1} \left(\frac{\bar{z}^2}{2} + |z|^2 \right) dz$ e $\int_{\gamma_2} \left(\frac{\bar{z}^2}{2} + |z|^2 \right) dz$.

Solução: Escrevendo

$$f(z, \bar{z}) = \frac{\bar{z}^2}{2} + |z|^2 = u(x, y) + iv(x, y),$$

obtemos $u = \frac{1}{2}(3x^2 + y^2)$ e $v = -xy$. Para $\gamma_1 : z = e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, tem-se $x = \cos t$, $y = \sin t$ e um cálculo direto fornece

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{\bar{z}^2}{2} + |z|^2 \right) dz = 3i.$$

Para $\gamma_2 : z = (-1 + 2t)i$, $0 \leq t \leq 1$, obtemos

$$\int_{\gamma_2} \left(\frac{\bar{z}^2}{2} + |z|^2 \right) dz = \frac{i}{3}.$$

(b) Calcule o trabalho e o fluxo associados a integral complexa $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} \left(\frac{\bar{z}^2}{2} + |z|^2 \right) dz$.

Solução: Como γ_2^- é o caminho inverso de γ_2 ,

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f(z, \bar{z}) dz = \int_{\gamma_1} f(z, \bar{z}) dz - \int_{\gamma_2} f(z, \bar{z}) dz = 3i - \frac{i}{3} = \frac{8}{3}i.$$

Sabendo que $\oint f(z) dz = W + iF$, onde W é o trabalho e F o fluxo, segue que

$$W = 0, \quad F = \frac{8}{3}.$$

2. Para uma função complexa de variável complexa $f(x + iy)$ que satisfaz a condição $\operatorname{Re} f(x + iy) = x^3 - 3xy^2$, determine $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ de forma a que a integral complexa $\int_{\gamma} f(z) dz$ seja igual a zero para todo o caminho γ simples e fechado.

Solução: Se $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo caminho simples e fechado, então f deve ser analítica. Escrevendo $f = u + iv$ com $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, pelas equações de Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \implies v(x, y) = 3x^2y + C(y).$$

Derivando em y ,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + C'(y) = 3x^2 - 3y^2 \implies C'(y) = -3y^2,$$

logo $C(y) = -y^3 + K$, K constante. Assim,

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + K.$$

3. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\int_{1+\sqrt{3}i}^0 \frac{1}{(1-z)^2} dz$

Solução: Fazendo $u = 1 - z$ (logo $du = -dz$) obtemos

$$\int_{1+\sqrt{3}i}^0 \frac{1}{(1-z)^2} dz = \int_{-\sqrt{3}i}^1 \frac{1}{u^2} (-du) = \int_1^{-\sqrt{3}i} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} \Big|_1^{-\sqrt{3}i} = 1 - \frac{1}{-\sqrt{3}i}.$$

Portanto,

$$\int_{1+\sqrt{3}i}^0 \frac{1}{(1-z)^2} dz = \frac{3 - \sqrt{3}i}{3}.$$

(b) $\int_{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}^{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} \frac{z}{z^2+1} dz$

Solução: Com $u = z^2 + 1$ (logo $du = 2z dz$),

$$\int_{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}^{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} \frac{z}{z^2+1} dz = \frac{1}{2} \int_{1-4i}^{1+4i} \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(u) \Big|_{1-4i}^{1+4i} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+4i}{1-4i} \right).$$

$$(c) \int_{\frac{i\pi}{3}}^{\frac{i\pi}{2}} \cosh(z) \sinh(z) dz.$$

Solução: Com $u = \cosh(z)$ (logo $du = \sinh(z) dz$),

$$\int_{i\pi/3}^{i\pi/2} \cosh(z) \sinh(z) dz = \int_{\cosh(i\pi/3)}^{\cosh(i\pi/2)} u du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_{\cosh(i\pi/3)}^{\cosh(i\pi/2)}.$$

Como $\cosh(i\theta) = \cos \theta$, segue que

$$\int_{i\pi/3}^{i\pi/2} \cosh(z) \sinh(z) dz = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{8}.$$

4. Considere a integral complexa da forma $\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{(z+a)(z-ib)} dz$, onde a e b são dois parâmetros reais e γ é o caminho dado pela a elipse de equação $|z-2i| + |z+2i| = 6$.

- (a) Encontre uma parametrização para o caminho γ . Represente geometricamente o resultado obtido no plano de Argand-Gauss.

Solução: A condição $|z-2i| + |z+2i| = 6$ descreve uma elipse com focos em $F_1 = (0, 2)$ e $F_2 = (0, -2)$, com $2a = 6$ (logo $a = 3$) e $c = 2$. Assim, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$, isto é, $b = \sqrt{5}$, e a equação pode ser escrita como

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Uma parametrização é

$$\gamma: \quad z(\theta) = \sqrt{5} \cos \theta + 3 \sin \theta i, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

- (b) Determine para que valores de a e b a integral acima dá zero.

Solução: A função

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{(z+a)(z-ib)}$$

tem polos em $z = -a$ e $z = ib$. Para que a integral em torno de γ seja zero, é necessário que não haja polos no interior de γ . Pelo desenho da elipse, isso ocorre quando

$$|a| > \sqrt{5} \quad \text{e} \quad |b| > 3.$$

- (c) Determine para que valores de a e b a integral acima dá $-\frac{2\pi \sinh(b)}{a+ib}$.

Solução: Se $z = ib$ está no interior de γ , então $z = ib$ é um polo simples de f . Pela fórmula integral de Cauchy, tomando $g(z) = \frac{\sin(z)}{z+a}$, temos

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{(z+a)(z-ib)} dz = 2\pi i g(ib) = 2\pi i \frac{\sin(ib)}{a+ib} = 2\pi i \frac{i \sinh(b)}{a+ib} = -\frac{2\pi \sinh(b)}{a+ib}.$$

Logo, precisamos de ib dentro da elipse e $-a$ fora dela, isto é,

$$|a| > \sqrt{5} \quad \text{e} \quad |b| < 3.$$

Observações:

- Na resolução da lista deverá incluir todos os cálculos que realizou para chegar à solução. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.
- O enunciado da lista deverá ser impresso, devidamente preenchido (Nome, Turma e RA) e entregue com a resolução da lista.
- 13 de Novembro de 2014 é a data limite para entrega da lista resolvida.
- Não entrega da lista de exercícios na data limite conta como zero (0).

Bom Trabalho!