

1.(a)	1.(b)	1.(c)	1.(d)	2.	3.(a)	3.(b)	3.(c)	4.	5.(a)	5.(b)	5.(c)	5.(d)	Σ

Lista L_2 de MA044 — 02/10/2014

NOME: **WAGNER DA ROCHA - GABARITO** Turma: **X/Y RA: 118955**

1. Para o conjunto $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ considere a transformação fracionária linear $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ de pontos $T(i) = 0$, $T(-i) = \infty$ e $T(1) = e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$, onde φ denota um parâmetro real.

- (a) Calcule $w = T(z)$ e $z = T^{-1}(w)$.

Solução: Temos $T(i) = 0$, $T(-i) = \infty$ e $T(1) = e^{i(\varphi - \pi/2)} = -ie^{i\varphi}$. Pela invariância da razão cruzada,

$$\frac{(i-1)(-i-z)}{(i-z)(-i-1)} = \frac{(0 - (-ie^{i\varphi}))(\infty - w)}{(0 - w)(\infty - (-ie^{i\varphi}))},$$

de onde obtemos

$$w = T(z) = e^{i\varphi} \frac{z-i}{z+i}.$$

Para a inversa, resolvendo $w = e^{i\varphi} \frac{z-i}{z+i}$ em z :

$$z = T^{-1}(w) = i \frac{w + e^{i\varphi}}{-w + e^{i\varphi}}; \quad \text{isto é,} \quad z = i \frac{w + e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - w}.$$

- (b) Determine o conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfaz a condição $\operatorname{Re}(T(z)) > 0$. Represente no plano de Argand-Gauss a solução obtida.

Solução: Da expressão

$$T(z) = e^{i\varphi} \frac{z-i}{z+i},$$

multiplicando por $\frac{\overline{z+i}}{z+i} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-i}$, obtemos

$$T(z) = e^{i\varphi} \frac{|z|^2 - 2i \operatorname{Re}(z) - 1}{|z|^2 + 2 \operatorname{Im}(z) + 1}.$$

Escrevendo $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, segue que

$$\operatorname{Re}(T(z)) = \frac{\cos \varphi (|z|^2 - 1) + 2 \operatorname{Re}(z) \sin \varphi}{|z|^2 + 2 \operatorname{Im}(z) + 1}.$$

Como $|z|^2 + 2 \operatorname{Im}(z) + 1 = x^2 + (y+1)^2 > 0$ para $z \neq -i$, então $\operatorname{Re}(T(z)) > 0 \iff \cos \varphi (|z|^2 - 1) + 2 \operatorname{Re}(z) \sin \varphi > 0$. Em particular, escrevendo $z = x + iy$:

- Se $\cos \varphi \neq 0$, podemos dividir por $\cos \varphi$ e completar quadrados:

$$x^2 + y^2 - 1 + 2x \tan \varphi \geq 0 \iff (x + \tan \varphi)^2 + y^2 \geq \sec^2 \varphi,$$

onde o sinal $\geq$ é $>$ se $\cos \varphi > 0$ e $<$ se $\cos \varphi < 0$.

- Se $\cos \varphi = 0$ (isto é, $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$), a condição fica $\operatorname{Re}(T(z)) > 0 \iff 2x \sin \varphi > 0$, ou seja, um semiplano $x > 0$ ou $x < 0$.

No caso usual $\cos \varphi > 0$, a região é o exterior do círculo de centro $(-\tan \varphi, 0)$ e raio $|\sec \varphi|$.

- (c) Calcule os pontos fixos de $T(z)$. O que pode concluir acerca dos pontos fixos de $T^{-1}(w)$?

Solução: Um ponto fixo z^* satisfaz $T(z^*) = z^*$, isto é,

$$e^{i\varphi} \frac{z^* - i}{z^* + i} = z^* \iff (z^*)^2 + z^*(i - e^{i\varphi}) + ie^{i\varphi} = 0.$$

Assim,

$$z^* = \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi} - i \pm \sqrt{(i - e^{i\varphi})^2 - 4ie^{i\varphi}} \right).$$

Para T^{-1} obtemos a mesma equação quadrática; logo, os pontos fixos de T e T^{-1} coincidem.

- (d) Determine o conjunto de pontos $w = T(z)$ que satisfaz a condição $|z + i| \geq \frac{4e^\pi}{e^{2\pi} - 1}$.

Solução: Usando $z = T^{-1}(w) = i \frac{w + e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - w}$, temos

$$z + i = \frac{2ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - w} \implies |z + i| = \frac{|2ie^{i\varphi}|}{|w - e^{i\varphi}|} = \frac{2}{|w - e^{i\varphi}|}.$$

Como $\frac{4e^\pi}{e^{2\pi} - 1} = \frac{2}{\sinh \pi}$, segue que

$$|z + i| \geq \frac{4e^\pi}{e^{2\pi} - 1} \iff \frac{2}{|w - e^{i\varphi}|} \geq \frac{2}{\sinh \pi} \iff |w - e^{i\varphi}| \leq \sinh \pi.$$

Portanto, a imagem é o disco fechado centrado em $e^{i\varphi}$ de raio $\sinh \pi$.

Sugestão: Use a transformação fracionária linear inversa $z = T^{-1}(w)$.

2. Verifique que para todos os pontos $z, w \in \mathbb{C}$, as funções complexas de variável complexa $\sin$ e $\cos$ satisfazem as seguintes propriedades:

- (a) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

Solução: Usando

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

temos

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = \frac{1}{4} \left(- (e^{iz} - e^{-iz})^2 + (e^{iz} + e^{-iz})^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

(b) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$

Solução: Pelas definições exponenciais,

$$\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) = \frac{1}{2} (e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) = \cos(z+w).$$

(c) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).$

Solução: Analogamente,

$$\sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z) = \frac{1}{2i} (e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}) = \sin(z+w).$$

3. Determine o conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ para os quais a função $f(z) = i^{2z}$ satisfaz:

(a) $f(z) = f(z+4)$

Solução: Como

$$i^{2z} = e^{2z \log i} = e^{2z(\ln|i| + i\frac{\pi}{2})} = e^{i\pi z},$$

temos $f(z) = e^{i\pi z}$. Logo $f(z+2) = f(z)$ para todo z , e em particular $f(z) = f(z+4)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) $f(z) = \operatorname{Re}(f(z))$

Solução: Escrevendo $z = x + iy$,

$$f(z) = e^{i\pi(x+iy)} = e^{-\pi y} (\cos(\pi x) + i \sin(\pi x)).$$

Assim, $f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) \iff \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \iff \sin(\pi x) = 0$, ou seja, $x = k$ com $k \in \mathbb{Z}$ (e $y \in \mathbb{R}$ arbitrário).

(c) $\operatorname{Im}(f(z)) = |f(z)|.$

Solução: Temos $\operatorname{Im}(f(z)) = e^{-\pi y} \sin(\pi x)$ e

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = e^{i\pi z} e^{-i\pi \bar{z}} = e^{i\pi(z-\bar{z})} = e^{-2\pi y}.$$

Da condição $\operatorname{Im}(f(z)) = |f(z)|$ segue $\operatorname{Im}^2(f(z)) = |f(z)|^2$, isto é, $e^{-2\pi y} \sin^2(\pi x) = e^{-2\pi y}$, logo $\sin^2(\pi x) = 1$. Além disso, como $|f(z)| \geq 0$, a igualdade $\operatorname{Im}(f(z)) = |f(z)|$ implica $\sin(\pi x) \geq 0$, isto é, $\sin(\pi x) = 1$. Assim,

$$x = \frac{1}{2} + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

com $y \in \mathbb{R}$ arbitrário.

4. Para $n \in \mathbb{N}$ calcule, caso exista, o limite $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^n - e^{-i\frac{n\pi}{2}}}{z^2 + 1}$.

Solução: Note que $e^{-i\frac{n\pi}{2}} = (e^{-i\frac{\pi}{2}})^n = (-i)^n$. Assim,

$$z^n - (-i)^n = (z + i) \left(z^{n-1} + z^{n-2}(-i) + \cdots + z(-i)^{n-2} + (-i)^{n-1} \right).$$

Como $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$, cancelando $(z + i)$ obtemos

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^n - e^{-i\frac{n\pi}{2}}}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^{n-1} + z^{n-2}(-i) + \cdots + (-i)^{n-1}}{z - i}.$$

Substituindo $z = -i$, o numerador vira a soma de n termos iguais a $(-i)^{n-1}$, logo

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^n - e^{-i\frac{n\pi}{2}}}{z^2 + 1} = \frac{n(-i)^{n-1}}{-2i} = \frac{n}{2}(-i)^{n-2}.$$

5. Para $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, considere a função $f(z) = \frac{\cos\left(\frac{z}{n+1}\right)}{\sin(z)}$.

- (a) Diga, justificando, se $f(z)$ é periódica. Em caso afirmativo, indique qual o período de $f(z)$.

Solução: Como $\sin(z) = \sin(z + 2k\pi)$ e $\cos\left(\frac{z}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{z}{n+1} + 2k'\pi\right)$, um período comum para $f(z) = \frac{\cos\left(\frac{z}{n+1}\right)}{\sin(z)}$ é

$$\tau = 2(n+1)\pi.$$

- (b) Determine o domínio de $f(z)$.

Solução: Como o domínio de $\cos$ e $\sin$ é $\mathbb{C}$, o domínio de f é dado por $\sin(z) \neq 0$. Assim,

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

- (c) Diga, justificando, para que conjunto de pontos do domínio de $f(z)$ a função $f(\arcsin(z))$ está bem definida.

Solução: Temos

$$f(\arcsin(z)) = \frac{\cos\left(\frac{\arcsin(z)}{n+1}\right)}{\sin(\arcsin(z))} = \frac{\cos\left(\frac{-i \log(iz + \sqrt{1-z^2})}{n+1}\right)}{z}.$$

Logo, $f(\arcsin(z))$ está bem definida se $z \neq 0$.

(d) Calcule o limite $\lim_{z \rightarrow -i} f(\arcsin(z))$.

Solução: Usando a expressão acima e tomando $z \rightarrow -i$:

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(\arcsin(z)) = \frac{\cos\left(\frac{-i \log(i(-i) + \sqrt{1 - (-i)^2})}{n+1}\right)}{-i} = i \cos\left(\frac{-i \log(1 + \sqrt{2})}{n+1}\right).$$

Como $\cos(-i a) = \cosh(a)$, segue que

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(\arcsin(z)) = i \cosh\left(\frac{1}{n+1} \log(1 + \sqrt{2})\right).$$

Observações:

- Na resolução da lista deverá incluir todos os cálculos que realizou para chegar à solução. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.
- O enunciado da lista deverá ser impresso, devidamente preenchido (Nome, Turma e RA) e entregue com a resolução da lista.
- 09 de Outubro de 2014 é a data limite para entrega da lista resolvida.
- Não entrega da lista de exercícios na data limite conta como zero (0).

Bom Trabalho!