

1.	2.	3.	4.(a)	4.(b)	4.(c)	4.(d)	Σ

Lista L_1 de MA044 — 18/09/2014

NOME: **WAGNER DA ROCHA - GABARITO** Turma: **x/Y RA: 118955**

1. Determine todas as soluções da equação $\frac{iz^2}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{2i}$ que satisfazem $|z| = 1$.

Solução: Da equação

$$\frac{iz^2}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{2i},$$

obtemos

$$-2z^2 = (z^2 - 1)^2 \iff -2z^2 = z^4 - 2z^2 + 1 \iff z^4 = -1.$$

Como $|z| = 1$, as soluções são as quatro raízes quartas de -1 :

$$z_k = \exp\left(\frac{\pi i}{4}(1 + 2k)\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Logo,

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i), \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

2. Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ satisfaz $z^n = e^{\frac{in\pi}{2}}$ para algum número natural $n \neq 1$, então

$$1 - iz - z^2 + \dots + (-i)^{n-1}z^{n-1} = 0.$$

Solução: Como $z^n = e^{\frac{in\pi}{2}} = (e^{\frac{i\pi}{2}})^n = i^n$, temos $z^n = i^n$. Note que

$$1 - iz - z^2 + \dots + (-i)^{n-1}z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-iz)^k,$$

que é uma PG de razão $q = -iz$. Como $z^n = i^n$, temos

$$q^n = (-i)^n z^n = (-i)^n i^n = ((-i)i)^n = 1^n = 1.$$

Se $q \neq 1$ (equivalentemente, $z \neq i$), então a soma de n termos da PG é

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-iz)^k = \frac{1 - (-iz)^n}{1 - (-iz)} = \frac{1 - (-i)^n z^n}{1 + iz} = \frac{1 - (-i)^n i^n}{1 + iz} = \frac{1 - ((-i)i)^n}{1 + iz} = \frac{1 - 1^n}{1 + iz} = 0.$$

No caso especial $z = i$ (isto é, $q = 1$), a soma vale $\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

3. Represente no plano de Argand-Gauss a região definida pelas inequações

$$|z|^2 \leq \operatorname{Im}(i\bar{z}), \quad \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{4}, \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}.$$

Solução: Escrevendo $z = x + iy$:

(I) $|z|^2 \leq \operatorname{Im}(i\bar{z})$. Como $|z|^2 = x^2 + y^2$ e $\operatorname{Im}(i\bar{z}) = x$, segue que

$$x^2 + y^2 \leq x \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

(II) $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{4}$ equivale a $x > \frac{1}{4}$.

(III) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$ equivale a $-x \leq y \leq x$ (setor entre $y = x$ e $y = -x$).

Portanto, a região pedida é a interseção das regiões (I), (II) e (III).

4. Sejam z e w dois números complexos da forma $z = x + iy$, $w = u + iv$, θ um número real e R_θ , M duas matrizes 2×2 dadas por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique que $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ e $M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}$.

Solução: Temos

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix},$$

e de modo análogo

$$M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + iv \\ u - iv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}.$$

(b) Calcule M^{-1} .

Solução: Como $\det(M) = 1 \cdot (-i) - 1 \cdot i = -2i$, segue que

$$M^{-1} = \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Verifique que $MR_\theta M^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

Solução: Um cálculo direto mostra que

$$MR_\theta M^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

(d) Usando as alíneas anteriores, mostre que para valores de θ no intervalo $(-\pi, \pi]$ a equação algébrica $w = e^{i\theta}z$ é equivalente à equação matricial $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solução: Se $w = e^{i\theta}z$, então

$$w = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Logo $u = x \cos \theta - y \sin \theta$ e $v = x \sin \theta + y \cos \theta$, isto é,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A recíproca é imediata, portanto as equações são equivalentes.

Observações:

- Na resolução da lista deverá incluir todos os cálculos que realizou para chegar à solução. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.
- O enunciado da lista deverá ser impresso, devidamente preenchido (Nome, Turma e RA) e entregue com a resolução da lista.
- 25 de Setembro de 2014 é a data limite para entrega da lista resolvida.
- Não entrega da lista de exercícios na data limite conta como zero (0).

Bom Trabalho!