

MA502 - ANÁLISE 1

EXERCÍCIOS 1: CONJUNTOS, CARDINALIDADE E NÚMEROS REAIS

Date: 29 March, 2020

Professor: Sahibzada Waleed Noor

1. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X . Prove que se X é finito e $\text{card} X = n$, então $\text{card} \mathcal{P}(X) = 2^n$.
2. Seja $\mathcal{F}(X; Y)$ o conjunto das funções $f : X \rightarrow Y$. Se $\text{card} X = m$ e $\text{card} Y = n$, então $\text{card} \mathcal{F}(X; Y) = n^m$.
3. Seja $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uma bijeção (desde que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são equivalentes) e $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a projeção $\pi(m, n) = n$. Provar que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definido por $f = \pi \circ \phi$ tem a propriedade que $f^{-1}(n)$ é infinito $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. Use o exercício anterior para mostrar que $\mathbb{N}$ pode ser escrito como a união infinita de subconjuntos infinitos que são mutuamente disjuntos.
5. Seja X um conjunto infinito. Prove que o conjunto $\mathcal{P}(X)$ de todos os subconjuntos de X não é enumerável. Dica: Use o fato de que o conjunto de todas as sequências infinitas de 0 e 1 é não enumerável.
6. Seja a, b, c, d números racionais e x um número irracional tal que $cx + d \neq 0$. Prove que $(ax + b)/(cx + d)$ é irracional se e somente se $ad \neq bc$.
7. Prove que $||x| - |y|| \leq |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$.
8. Prove que

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n$$

para todo $x \neq 1$.

9. Denote por $[x]$ a *parte inteira* de x . Por exemplo $[3/2] = 1$. Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então mostre isso

(a) $[x + y] \geq [x] + [y]$,

(b) $[[x]/n] = [x/n]$.

10. Seja $S, T \subset \mathbb{R}$ subconjuntos não vazios limitados superiormente, e defina

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}.$$

Provar que

$$\sup (S + T) = \sup S + \sup T.$$

IMECC-UNICAMP, CAMPINAS, BRAZIL