

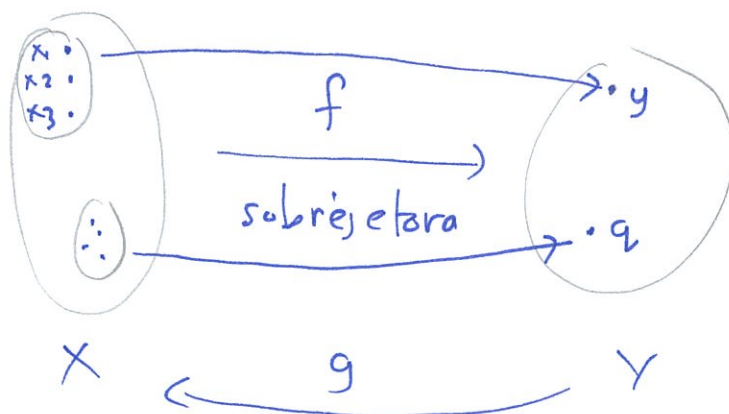
enumeráveis

$$X \xrightleftharpoons[g \circ f]{\sim} g \circ f(X)$$

é bijeção

⑦

③) Seja $f: X \rightarrow Y$ sobrejetora. Se X é no máximo enumerável então Y é também



Para cada $y \in Y$ podemos escolher "um" $x \in X$ tais que $x = g(y)$ - Isto define um injetora $g: Y \rightarrow X$

$\therefore$ Pelo observação ② Y é no máximo enumerável. $\square$

④) Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Teorema: Se X e Y são enumeráveis, então o "produto cartesiano" de dois $X \times Y$ é enumerável.

Demonstração: Existe bijeções $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ e

$g: \mathbb{N} \rightarrow Y \Rightarrow Q: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X \times Y$ definido por

$$Q(m, n) := (f(m), g(n)) \text{ é bijeção}$$

$\rightarrow$ Basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

→ Consideramos $\psi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

(8)

$$\psi(m,n) := 2^m \cdot 3^n$$

→ ψ é injetora: Pela unicidade da decomposição de um inteiro em fatores primos

∴ Pelo obs. (2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável é então

$X \times Y$ é enumerável $\square$

Teorema: O conjunto $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$ "racionais" é enumerável.

Dem: Seja $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$ e podemos definir

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(m,n) := \frac{m}{n}$$

→ Claro que f é sobrejetora. Pelo obs. (3) e thm. anterior $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável $\Rightarrow \mathbb{Q}$ é enumerável $\square$

★ Sequências (ou Sucessões)

Uma "sequência" é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ com domínio $\mathbb{N}$ e imagem em qualquer conjunto A .

→ Se $f(n) = x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, é usual representar f pelo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e dizemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma "sequência" em A .

→ Os elementos $x_1, x_2, \dots$ são chamados "termos" da sequência e eles não são necessariamente distintos. (distintos se e só se f é injetora)

→ Para conjunto enumerável A existe bijeção $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} A \Rightarrow$ Podemos considerar A como uma sequência. ★

★ Um conjunto "não-enumerável"

Teorema: Seja A o conjunto de todas as sequências cujos termos são 0 e 1

$$A := \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \}$$

$$= \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ ou } 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \}.$$

A não é enumerável.

→ $(0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots), (1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots) \dots$

Demonstração: Suponha, pelo contrário, que A seja enumerável.

→ Então A é uma sequência de sequências $s_1, s_2, s_3, \dots$ (cada s_i é uma sequência com termos 0 e 1)

→ Encontraremos uma "contradição" construindo uma sequência s de 0 e 1 diferente de todas as $s_1, s_2, s_3, \dots$ - (Porque isso implica que $s \in A$ e $s \notin A$)

$s_1 :$	0	1	1	0	...	"A ideia da
$s_2 :$	1	0	1	1	...	demonstração
$s_3 :$	1	1	1	0	...	é chamada
$s_4 :$	0	0	0	1	...	processo diagonal
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	de Cantor"
$s :$	1	1	0	0	...	"continua assim"

→ Se o n -ésimo termo em s_n é 1, seja 0 o n -ésimo termo de s e vice-versa.

→ Então s é diferente de cada uma das sequências $s_1, s_2, s_3, \dots$ em A . Então $s \notin A$.

→ Mas claro que $s \in A$. Contradição.

→ Então A é não-enumerável $\square$

★ Teorema: Seja $E_1, E_2, E_3, \dots$ uma sequência ① de conjuntos enumeráveis e

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Então S é enumerável.

Demonstração: Considerando os elementos de cada E_n como termos de uma sequência $\{x_{nk}\}$, $k=1, 2, 3, \dots$, formamos a matriz

$$\begin{array}{lcl} E_1: & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots \\ E_2: & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \dots \\ E_3: & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots \\ E_4: & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

→ Este matriz contém todos os elementos de S

→ Como as setas indicam, seus elementos de S pode ser escrito em uma sequência

$$\begin{array}{lcl} S: & x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{23}, x_{14}, x_{41}, x_{32}, x_{24}, \dots & \textcircled{A} \\ \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10, \dots \end{array}$$

→ Se o E_n não tem elementos em com, então a sequência acima tem termos distintos e

$\therefore S \sim \mathbb{N} \Rightarrow S$ é enumerável.

Mas se dois de E_n so tiverem elementos $\textcircled{12}$ em comum, êstes aperecerão mais de uma vez em $\textcircled{A}$ -

→ Portanto, contamos todos esses elementos repetidos em $\textcircled{A}$ uma vez -

→ Isso significa que existe um subconjunto

$$T \subsetneq \mathbb{N} \text{ tais que } S \sim T$$

∴ S é equivalente com um subconjunto infinito de $\mathbb{N} \Rightarrow S$ é enumerável III