

★ Um conjunto A é

- (i) "finito" se $A \sim J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$
- (ii) "infinito" se A não é finito
- (iii) "enumerável" se $A \sim \mathbb{N}$
- (iv) "no máximo enumerável" se A é finito ou enumerável

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}$ "todos os inteiros"

$$\mathbb{Z} = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

$$\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Defina uma função por: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(n) := \begin{cases} n/2 & n \text{ par} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

(a) f é sobrejetora: Para $a \in \mathbb{Z}$ positivo, sempre existe $n = 2a$ "par" tais que $f(n) = f(2a) = a$

Para $a \in \mathbb{Z}$ negativo, existe $n = -2a + 1 \in \mathbb{N}$ "ímpar" tais que $f(n) = a$.

→ Não consideramos a pre-imagem de 0:

$$f(1) = 0$$

$\therefore f$ é sobrejetora.

(b) f é injetora: $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$

→ Se n e m são simultaneamente pares então

$$f(n) = f(m) \Rightarrow \frac{n}{2} = \frac{m}{2} \Rightarrow n = m$$

⑤

→ Se n e m são ímpares: $f(n) = f(m)$

$$\Rightarrow -\frac{n-1}{2} = -\frac{m-1}{2} \Rightarrow n = m$$

→ Mas se n é par e m é ímpar:

$$f(n) = f(m) \Rightarrow \frac{n}{2} = -\frac{m-1}{2} \quad \text{"contradição"}$$

$$> 0 \neq < 0$$

$\therefore f$ é bijeção e $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$

★ Teorema: Se X é conjunto infinito, então existe função $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ injetora.

Demonstração: Para cada subconjunto não-vazio

$A \subset X$, escolhemos um elemento $x_A \in A$.

→ Definimos $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ "indutivamente":

① Suponhamos $f(1) = x_x$

② Supondo já definimos $f(1), f(2), \dots, f(n)$

escrevemos $A_n := X - \{f(1), \dots, f(n)\} \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(porque X é infinito)

③ Passo Indutivo: Definimos $f(n+1) := x_{A_n}$

$\therefore f: \mathbb{N} \rightarrow X$ é bem definido

f é injetivo: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m < n$. Então

$f(m) \in \{f(1), \dots, f(n-1)\}$ mas $f(n) \in A_{n-1} = X - \{f(1), \dots, f(n-1)\}$

Logo $f(m) \neq f(n) \Rightarrow f: \mathbb{N} \rightarrow X$ é injetora $\square$ ⑤

Corolário: X ~~é infinito~~ é um conjunto infinito se e só se X tem um subconjunto enumerável.

$\rightarrow f(\mathbb{N})$ é subconjunto "enumerável" em X .

$\mathbb{N} \xrightarrow[\text{injetiva}]{f}$



X infinito

Exemplo: Seja $P := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

"números primos" $\rightarrow P$ é infinito

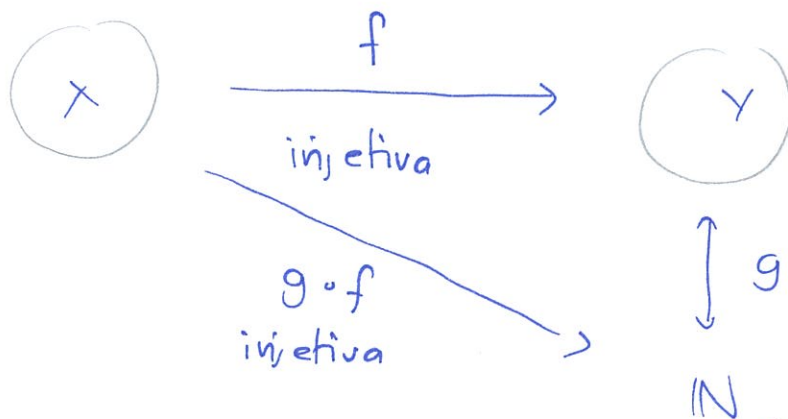
$\rightarrow P$ é enumerável: $f(n) := n$ -ésimo número primo

$\rightarrow$ Em particular $\mathbb{N} \sim P$ $\square$

★ Observações:

① Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é no máximo enumerável.

② Seja $f: X \rightarrow Y$ injetiva. Se Y é ^{no máximo} enumerável então X também é ~~enumerável~~.



$\therefore g \circ f(X)$ é subconjunto de $\mathbb{N} \Rightarrow g \circ f(X)$ e $\mathbb{N}$ são no máximo

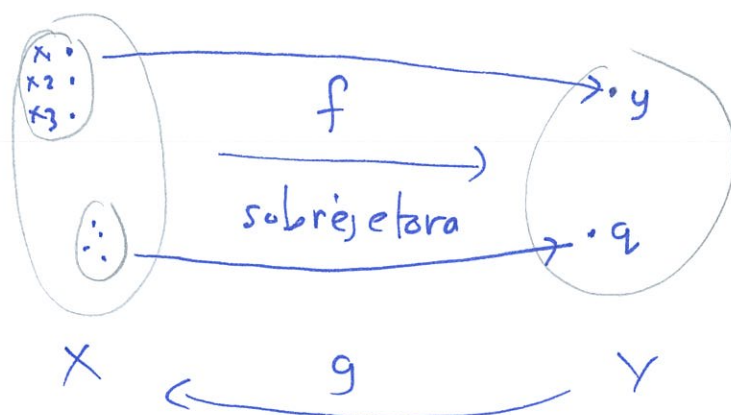
enumeráveis

$$X \xrightarrow{\sim} g \circ f(X)$$

$g \circ f$
é bijeção

(7)

(3) Seja $f: X \rightarrow Y$ sobrejetora. Se X é no máximo enumerável então Y é também



Para cada $y \in Y$ podemos escolher "um" $x \in X$ tais que $x = g(y)$ - Isto define um injetora $g: Y \rightarrow X$

$\therefore$ Pelo observação (2) Y é no máximo enumerável. $\square$

(4) Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Teorema: Se X e Y são enumeráveis, então o "produto cartesiano" de dois $X \times Y$ é enumerável.

Demonstração: Existe bijeções $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ e

$g: \mathbb{N} \rightarrow Y \Rightarrow Q: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X \times Y$ definido por

$$Q(m, n) := (f(m), g(n)) \text{ é bijeção}$$

$\rightarrow$ Basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

→ Consideramos $\psi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

(8)

$$\psi(m, n) := 2^m \cdot 3^n$$

→ ψ é injetora: Pela unicidade da decomposição de um inteiro em fatores primos

$\therefore$ Pelo obs. (2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável é então

$X \times Y$ é enumerável $\square$

Teorema: O conjunto $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ "racionais" é enumerável.

Dem: Seja $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$ e podemos definir

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(m, n) := \frac{m}{n}$$

→ Claro que f é sobrejetora. Pelo obs. (3) e thm. anterior $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável $\Rightarrow \mathbb{Q}$ é enumerável $\square$