MT402 - Matrizes - SEM. I / 2006

Profa. Véra Lucia da Rocha Lopes

EXERCICIOS 8 - Cálculo de Auto-valores e Auto-vetores

1. Mostre que a matriz $M = \begin{bmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}$ é não singular.

2. Mostre que os auto-valores de AA^T são todos não negativos.

3. Seja A, matriz $n \times n$ inversível. Qual a relação entre os auto-valores e os auto-vetores de A e A^{-1}?

4. Seja α não petencente ao espectro de A. Mostre que x é auto-vetor de A se, e somente se, x é auto-vetor de $(A - \alpha I)$.

5. Explique porque a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem pelo menos 2 auto-valores reais.

6. Um mesmo vetor não pode ser auto-vetor associado a dois auto-valores distintos. **Justifique.**

7. Seja $\lambda(C)$ o espectro da matriz C. Prove ou dê um contra-exemplo:

   (a) Se $\lambda \in \lambda(A)$ e $\mu \in \lambda(B)$, A e B matrizes $n \times n$, então $\lambda + \mu \in \lambda(A + B)$.

   (b) Se $\lambda \in \lambda(A)$ e $\mu \in \lambda(B)$, A e B matrizes $n \times n$, então $\lambda\mu \in \lambda(AB)$.

8. Sejam λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n, auto-valores de A, e seja (λ_k, c) um auto-par de A.

   (a) Se λ não pertence a $\lambda(A)$, mostre que $(A - \lambda I)^{-1}c = \dfrac{c}{\lambda_k - \lambda}$.

   (b) De que maneira deve ser escolhido um vetor d para que λ_k seja auto-valoor de $A + cd^T$?

9. Sejam $A : m \times n$ e $B : n \times m$.

   (a) Mostre que AB e BA têm os mesmos auto-valores se $m = n$.

   (b) Explique porque, se $mneqn$, ento AB e BA podem não ter os mesmos auto-valores.

   (c) Explique que tipo de auto0valores são iguais e que tipo não são. Dê um exemplo.

10. Mostre que os auto-valores de uma matriz ortogonal são 1 ou -1.

11. Seja A matriz $n \times n$ simétrica e defina $r(x) \hat{=} \dfrac{x^T A x}{x^T x}$. Mostre que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) = \lambda_n,$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ são os auto-valores de A.

12. Sejam $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz associada à projeção ortogonal sobre um sub-espaço $S \subset \mathbb{R}^n$ e I a matriz identidade de ordem n. Mostre que $M = P + \mu I$ é definida positiva se $\mu > 0$ e semi definida positiva, se $\mu \geq 0$.

13. Seja A matriz simétrica de ordem n e (λ_1, x_1) um auto-par de A (obtido pelo método das potências). Seja $B = A - \lambda_1 \bar{x_1}\bar{x_1}^T$, onde $\bar{x_1}$ é o vetor x_1 normalizado na norma-2.

    (a) $\bar{x_1}$ é auto-vetor de B? Justifique.

    (b) Qual é que o maior auto-valor de B em módulo?

    (c) Use o método das potências e o procedimento acima para encontrar os três auto-pares da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

    Obs.: O procedimento acima é conhecido como um *Processo de Deflação.*

14. Seja $H = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$, onde A é matriz $n \times n$ com fatoração SVD, $A = U \sum V^T$. Mostre que os auto-valores de H são $\pm\sigma_i$, com os correspondentes auto-vetores unitários $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_i \\ \pm u_i \end{bmatrix}$.

15. Mostre que, se A, matriz $n \times n$, é simétrica, sua forma de Hessenberg, H, é diagonal.

16. Seja A matriz $n \times n$, simétrica.

    (a) Mostre que seus auto-valores são todos reais.

    (b) Mostre que auto-vetores associados a auto-valores distintos de A são ortogonais.

17. (a) Mostre que, se A é diagonalizável, então todo auto-valor λ de A, tem $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.

    (b) Sejam A e B duas nmatrizes semelhantes, diagonalizáveis. Mostre que os sub-espaços associados ao mesmo auto-valor de A e B podem ser diferentes.

18. Mostre que, se A é unitáriamente semelhante a B, então AA^T é unitáriamente semaelhante a BB^T.

19. Prove ou dê um contra-exemplo: "Uma matriz A tem todos seus auto-velores iguais se, e somente se, $A = \lambda I$".

20. Prove ou dê um contra-exemplo: " Se A é semelhante a B e $\tilde{A}$ é semelhante a $\tilde{B}$, então AB é semelhante a $\tilde{A}\tilde{B}$".