

MT402 - Matrizes - SEM. I / 2006
 Profa. Véra Lucia da Rocha Lopes
 EXERCÍCIOS 6 - Método dos Quadrados Mínimos: 03/05/2006

1. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de posto n e $b \in \mathbb{R}^m$, considere o sistema 2×2 por blocos:

$$A = \begin{bmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde I é a matriz identidade $m \times m$. Mostre que este sistema tem uma única solução $(r, x)^T$, e que os vetores r e x são o resíduo e a solução do problema de QM, respectivamente.

2. Seja A com posto completo e b dados por

$$A = \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & v \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

onde $R \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $w \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $v \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}$, $c \in \mathbb{R}^k$ e $d \in \mathbb{R}^{(m-k)}$. Mostre que

$$\min \|Ax - b\|_2 = \|d\|_2^2 - \left(\frac{v^T d}{\|v\|_2} \right)^2.$$

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{posto}(A) = n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Seja x_w a solução do problema de Quadrados Mínimos ponderados $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|W(Ax - b)\|_2^2$, com $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matriz diagonal não singular e seja x_I a solução do problema de Quadrados Mínimos padrão ($W = I$). Mostre que:

(a) $x_w = x_I + (A^T W^2 A)^{-1} A^T (I - W^2)(Ax_w - b)$.

(b) Se $b \in \text{im}(A)$, então $x_w = x_I$.

4. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que $\text{posto}(A) = \text{posto}(B)$. Mostre que x é solução do problema de Quadrados Mínimos para o sistema $Ax = b$, se e somente se $B^T Ax = B^T x$. (Sugestão: provar que, se $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\text{posto}(A) = \text{posto}(B)$, então existe C inversível tal que $A = BC$.)

5. Considere o problema de Quadrados Mínimos lineares com posto deficiente:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{R}^{n-p}} \left\| \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\|_2^2,$$

onde $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $S \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$. Suponha que R é triangular superior e não singular. Mostre como obter a solução de norma-2 mínima, utilizando fatorações ortogonais sem pivoteamento.