MT402 - Matrizes - SEM. I / 2006

Profa. Véra Lucia da Rocha Lopes

EXERCICIOS V - Matrizes de projeção . Fatorações QR: 12/04/2006

1. Prove que, se P é um projetor ortogonal, então $I - 2P$ é unitário. Dê uma interpretação geométrica.

2. Seja E a matriz $m \times m$ tal que $Ex = \dfrac{x + Fx}{2}$, onde F é a matriz $m \times m$ que leva o vetor $[x_1; x_2; \ldots; x_m]$ no vetor $[x_m; \ldots; x_1]$.
   (a) O que a atuação da matriz E faz com um vetor $x \in \mathbb{R}^m$?
   (b) E é um projetor ortogonal?
   (c) Exiba os elementos da matriz E.

3. Para cada uma das matrizes a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   (a) Qual é a matriz de projeção P sobre $Im(A)$ e sobre $Im(B)$)?
   (b) Qual é a imagem de $v = [1; 2; 3]$ sob P em ambos os casos?
   (c) Determine uma fatoração QR completa e uma fatoração $\hat{Q}\hat{R}$ tanto de A quanto de B.

4. Seja P um projetor não nulo. Mostre que $||P||_2 \geq 1$, valendo a igualdade $\Leftrightarrow$ P for um projetor ortogonal.

5. Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Prove se verdadeira ou dê um contra-exemplo se falsa, cada uma das afirmações a seguir:
   (a) Se $\mathbb{R}^n = N(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$, ento P é uma projeção .
   (b) Se $\mathbb{R}^n = N(P) + \mathrm{Im}(P)$, ento P é uma projeção .
   (c) Se P é uma projeção , então $I - P$ também é uma projeção .
   (d) Se P é uma projeção , então $\mathrm{Im}(P) = N(I - P)$ e $\mathrm{Im}(I - P) = N(P)$.

6. Se $\mathrm{Im}(I - P) = N(P)$, prove que P é uma projeção .

7. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Prove que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus N(A)$ se, e somente se $N(A) = N(A^2)$.

8. Sejam P, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
   (a) $P+Q$ é uma projeção .
   (b) $PQ+QP=0$.
   (c) $PQ=QP=0$.

9. Seja $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma projeção . Prove que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, os vetores de $\mathbb{R}^n$: v e $(1-t)v+tPv$, têm a mesma imagem por P.

10. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m \leq n$, A de posto completo. Ache o projetor ortogonal sobre a $\mathrm{Im}(A)$ e o projetor ortogonal a $\mathrm{Im}(A)^{\perp}$.

11. Seja A matriz $m \times m$, tal que suas colunas ímpares sejam ortogonais às suas colunas pares. Numa fatoração QR reduzida de A : $A=\hat{Q}\hat{R}$, qual a estrutura de $\hat{R}$?

12. Sejam x_1, y_1, x_2, y_2 vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ tais que tanto x_1, y_1 quanto x_2, y_2 são LI. Considere os dois planos em $\mathbb{R}^3$:

$$P^1 = span\{x_1\,,\,y_1\} \text{ e } P^2 = span\{x_2\,,\,y_2\}.$$

Suponha que queiramos encontrar um vetor não nulo de $\mathbb{R}^3$ na interseção de P^1 com P^2. Encontre um método para resolver esse problema, reduzindo-o ao cálculo da fatoração QR de 3 matrizes 3×2.

13. Definimos **distância** entre dois sub-espaços S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^2$, por

$$dist(S_1 \;\; S_2) = ||P_1 - P_2||_2,$$

onde P_i é a projeção ortogonal sobre S_i. Trabalhando apenas com esta definição , mostre que, se $S_1 = \text{span }\{x\}$ e $S_2 = \text{span }\{y\}$, onde x e y são vetores unitários na norma-2 de $\mathbb{R}^n$, a $dist(S_1 \;\; S_2) = \sqrt{1-(x^Ty)^2}$.

14. Seja Q, $m\times n$ com colunas ortogonais. O que se pode dizer de Q^TQ?

15. Encontre a fatoração QR das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Seja $A = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $T \in \mathbb{R}^{p\times n}, S \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$ e posto$(A) = p$. Mostre que $X = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ satisfaz $AXA = A$ e $(AX)^T = AX$.

17. Sejam m, n, k inteiros tais que $m \geq n,\ k < n,\ k < m$. Sejam A matriz $m \times n$, $A = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & v \end{bmatrix}$, com $R \in I\!R^{k \times k}$, $w \in I\!R^{k \times (n-k)}$, $0 \in I\!R^{m-k \times k}$, $v \in I\!R^{(m-k) \times (n-k)}$ e $b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, com $c \in I\!R^k$ e $d \in I\!R^{(m-k)}$. Mostre que, se A é posto completo, então $min||Ax - b||_2^2 = ||d||_2^2 - (v^T d/||v||_2)^2$.

18. Seja $A \in I\!R^{m \times n}$ com posto$(A) = n$ e $A = QR$ uma fatoração ortogonal de A. Mostre que:
(a) $(A^T A)^{-1} = (R^T R)^{-1}$;

(b) Se $R = \begin{bmatrix} \alpha & v^T \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\alpha \in I\!R$, $S \in I\!R^{(n-1) \times (n-1)}$ e $C = (S^T S)^{-1}$, então

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} (1 + v^T C v)/\alpha & -v^T C/\alpha \\ -Cv/\alpha & C \end{bmatrix}.$$

$\in I\!R^{m \times n}$ com $T \in I\!R^{p \times n}, S \in I\!R^{p \times (n-p)}$ e posto$(A) = p$. Mostre que $X = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I\!R^{n \times m}$ satisfaz $AXA = A$ e $(AX)^T = AX$.

19. Se $A = QR$ é a fatoração ortogonal de $A \in I\!R^{n \times n}$ e A é matriz não singular, prove que R é também não singular.

20. Seja $A \in I\!R^{m \times n}$ com $posto(A) = n$ e $A = QR$ uma fatoração ortogonal de A. Mostre que:
(a) $(A^T A)^{-1} = (R^T R)^{-1}$.
(b) Se $R = \begin{bmatrix} \alpha & v^T \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\alpha \in I\!R$, $S \in I\!R^{(n-1) \times (n-1)}$ e $C = (S^T S)^{-1}$, então

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} (1 + v^T C v)/\alpha & -v^T C/\alpha \\ -Cv/\alpha & C \end{bmatrix}.$$

21. Se A é matriz $n \times n$ e Q_{ij} é a matriz de rotação plana dos eixos i e j de um ângula θ dado,
(a) Mostre que Q_{ij} é ortogonal.
(b) Mostre que as linhas i e j de QA são combinação linear das linhas i e j da matriz A.
(c) Seja $x \in I\!R^n$. Escreva o vetor $Q_{ij}x$.

22. Usando Householder, encontre a tranformação do vetor $v = (3\ \ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 1)^T$, no vetor $(\tau\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$. Qual o valor de τ?

23. Sejam x e y vetores não nulos de $I\!R^n$. Escreva um algoritmo para determinar uma matriz de Householder P tal que Px seja um múltiplo de y.

24. Sejam x e y vetores unitários de $I\!R^n$. Escreva um algoritmo, usando transformações de Givens, que calcule uma matriz ortogonal Q tal que $Q^T x = y$.

25. Sejam x e y vetores de $I\!R^m$ e seja $Q \in I\!R^{m\times m}$, matriz ortogonal. Mostre que, se $Qx = \begin{bmatrix} \alpha \\ u \end{bmatrix}$ e $Q^T y = \begin{bmatrix} \beta \\ v \end{bmatrix}$, com $\alpha,\ \beta,\ \in I\!R$ e $u,\ v,\ \in I\!R^{(m-1)}$, então $\langle u\, ,\, v \rangle = x^T y - \alpha\beta$.