MT402 - MATRIZES - SEM. I / 2006

Prof^a.: Véra Lucia da Rocha Lopes

EXERCICIOS 4 - Matrizes. Eliminaçãode Gauss/ FatoraçãoLU: 30/03/2006

1. Prove que o produto de matrizes triangulares superiores (inferiores) com diagonal unitária, é matriz triangular superior (inferior) com diagonal unitária.

2. Mostre que o determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.

3. Mostre que a inversa de uma matriz triangular superior (inferior), é uma matriz triangular superior (inferior).

4. Encontre os auto-valores e os auto-vetores de T, matriz triangular superior. Idem para matriz triangular inferior.

5. Prove que se A, matriz $n \times n$ é simétrica e tem todos os menores principais positivos, então A é definida positiva.

6. Prove que se A é matriz estritamente diagonalmente dominante ($|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |(a_{ij})|$), com valores positivos na diagonal principal, então A é simétrica, definida positiva.

7. Prove que se A é simétrica definida positiva, então todos seus auto-valores são positivos.

8. Seja A matriz triangular $n \times n$ (superior ou inferior). Escreva um algoritmo que calcule A^2 e sobreescreva o resultado na própria matriz A. Justifique porque isto é possível.

9. Analise a possibilidade de existência e unicidade da fatoração LU das matrizes a seguir, com e sem estratégia de pivoteamsnto parcial:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1.5 & 1 & 7.5 \\ 1.4 & 2.7 & 5.5 & 12 \\ -2 & 1 & 3 & 2.8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. *Pivoteamento Parcial Escalado:* "Esta estratégia consiste em calcular inicialmente o "tamanho" d_i da $i-$ésima linha de A, dado por $d_i = max_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|$ para todo $i = 1, \ldots, n$. A cada passo k é então escolhida para linha pivotal, entre as $n-k$ candidatas, a linha j, onde j é o menor inteiro entre k e n para o qual

$$\frac{|a_{jk}|}{d_j} \geq \frac{|a_{ik}|}{d_i}, \quad i = k, \ldots, n."$$

Analise a estratégia acima no exemplo: $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 0.0003x_1 & + & 1.566x_2 & = & 1.569 \\ 0.3454x_1 & - & 2.436x_2 & = & 1.018 \end{array} \right.$