MT402 - MATRIZES - SEM. I / 2006
Prof^a.: Véra Lucia da Rocha Lopes
EXERCICIOS 2 - Álgebra Matricial. Métrica: 20/03/2006

1. Considere as matrizes $A : m \times n$ e $B : n \times p$. Usando A e B particionadas por linha e/ou coluna de forma conveniente, descreva $C = (AB)^T$ na forma de produto externo de vetores. (forma uv^T.)

2. Prove a desigualdade de Hölder para $p = 2$.

3. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:
   (a) $||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{(n)}\,||x||_2$.
   (b) $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{(n)}\,||x||_\infty$.
   (c) $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$.

4. Seja $||\,.\,||$ uma norma em $\mathbb{R}^m$ e suponha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que, se posto$(A) = n$, então $||x||_A = ||Ax||$ é uma norma de vetores em $\mathbb{R}^n$.

5. Sejam x e $y \in \mathbb{R}^n$ e defina $\phi(\alpha) = ||x - \alpha y||_2$. Mostre que o mínimo de ϕ é atingido quando $\alpha = \dfrac{x^T y}{y^T y}$.

6. Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $C = AB - BA$. Mostre que $\sum_{i=1}^{n}(c_{ii}) = 0$.

7. Sejam $||\,.\,||$ uma norma induzida em $\mathbb{R}^{m\times n}$ e $0 \neq y \in \mathbb{R}^m$. Defina, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $||x||_y = ||yx^T||$. Mostre que $||\,.\,||_y$ é uma norma.

8. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular e $E = \alpha A$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam ainda $x, y, b \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ax = b$ e $(A + E)y = b$. Mostre que $||x - y|| = \dfrac{|\alpha|}{|1 + \alpha|}||x||$. Para que valores de α é possível garantir que $||y|| \leq 1.5||x||$?

9. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz singular, $b \in \mathbb{R}^n$, $\{A_k\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ uma seqüência de matrizes não singulares com $lim_{k\to\infty} A_k = A$ e $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ a seqüência das soluções dos sistemas lineares $A_k x_k = b$. Mostre ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: *a seqüência* $\{x_k\}$ *converge.*

10. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leq n$ e posto$(A) = m$. Seja $y \in \mathbb{R}^n$ a *projeção ortogonal* de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre $N(A)$, isto é: $y - x$ é ortogonal a todo vetor em $N(A)$. Mostre que $y = x - A^T(AA^T)^{-1}Ax$.

11. Mostre que $A^* = \dfrac{A + A^T}{2}$ é a matriz simétrica mais próxima de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na norma de Frobenius.

12. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que
$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \textstyle\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|).$$

13. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ e considere a matriz $A = v^T$. Mostre que a norma-2 da matriz A, induzida pela norma-2 de v é: $||A||_2 = ||v||_2$.

14. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $||A||_F = \sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{tr(AA^T)}$.

15. Sejam A e B matrizes para as quais o produto entre elas esteja definido. Mostre que $||AB||_F^2 \leq ||A||_F^2 ||B||_F^2$.

16. Seja A matriz $m \times n$ e Q matriz $m \times m$, ortogonal. Mostre que
    (a) $||Q||_2 = 1$.
    (b) $||Qx||_2 = ||x||_2$.
    (c) $||QA||_2 = ||A||_2$.
    (d) $||QA||_F = ||A||_F$.

17. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e defina $\|x\|_w = \sqrt{\sum_{i=1}^n (w_i x_i)^2}$, com $w_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Prove que $\|x\|_w$ é uma norma de vetores em $\mathbb{R}^n$.

18. Seja $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uma sub-matriz de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $m \leq n$. Denotando por κ o número de condição, mostre ou dê contra exemplo para cada uma das afirmações a seguir:
    (a) $\kappa(B) \leq \kappa(A)$; (b) $\kappa(B) \geq \kappa(A)$.

19. Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|P\|_\infty < 1$. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^n P^i = B,$$

    onde $B = (I + P)^{-1}$.

20. Prove ou dê um contra-exemplo:

$$v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|v\|_1 \|v\|_\infty \leq \frac{1 + \sqrt{n}}{2} \|v\|_2.$$

21. Sendo $A \in \mathbb{R}n \times n$ inversível e $\kappa_p(A)$ o seu número de condição na norma$-p$, mostre que:
    (a) $\kappa_p(A) = \dfrac{max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p}{min_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p}$.
    (b) $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A^T)$