

EXERCÍCIOS 10 - Sistemas Lineares - Método dos Gradientes Conjugados

Algoritmo: Gradientes Conjugados

Considere o problema de encontrar a solução do sistema de equações lineares $Ax = b$, onde A é matriz $n \times n$ simétrica, definida positiva (s.d.p.).

Passo 1 - Escolher o vetor aproximação inicial x_0 , fazer $p_0 = r_0 = b - Ax_0$ e $k = 0$. Se $r_0 = 0$, parar. x_0 é a solução.

Passo 2 - Enquanto $r_k \neq 0$,

$$k = k + 1$$

Se $k = 1$

$$p_1 = r_0$$

Caso contrário

$$\beta_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / r_{k-2}^T r_{k-2}$$

$$p_k = r_{k-1} + \beta_k p_{k-1}$$

Fim

$$\alpha_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / p_k^T A p_k$$

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$$

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$$

Fim

$$x = x_k$$

1. Prove que os resíduos $r_0, \dots, r_k$ gerados pelo algoritmo acima, satisfazem $r_i^T r_j = 0$, sempre que $j = i + 1$.
2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, definida positiva. Mostre que, se os vetores $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ são linearmente independentes, então as direções $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$, construídas recursivamente por:

$$d_0 = p_0$$

$$d_{k+1} = p_{k+1} - \sum_{i=0}^k \frac{p_{k+1}^T A d_i}{d_i^T A d_i} d_i, \text{ são } A\text{-conjugadas.}$$
3. Se, no exercício anterior tomamos $p_k = e_k$, o k -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, mostre que o método dos gradientes conjugados aplicado a $\min\{1/2x^T A x - b^T x\}$ é equivalente à eliminação gaussiana para resolver $Ax = b$.

4. Seja A matriz simétrica. (i) Prove que os auto-vetores correspondentes a dois auto-valores distintos de A são A -conjugados. (ii) Se $d_1, d_2, \dots, d_n$ são vetores A -conjugados, exiba $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $E^T A E$ seja diagonal.
5. Seja $\{x_k\}$ uma seqüência gerada pelo método dos gradientes conjugados.
 - (i) Prove que $r_l \in \kappa_k$ para todo $l < k$.
 - (ii) O fato provado no item (i) implica que $\kappa_k = \text{sapan}\{r_0, r_1, \dots, r_n\}$? **Justifique.**
6. Seja A matriz simétrica, definida positiva. Mostre que existe B , simétrica definida positiva, tal que $B^2 = A$. A matriz B é única? **Justifique.**
7. Suponha que A seja s.d.p. e que

$$\text{espectro}(A) \subset (1, 1.1) \cup (2, 2.2).$$

Baseado no resultado:

$$\|x_k - x^*\|_A \leq \|x_k - x^0\|_A \min_{p \in P_k, p(0)=1} \max_{z \in \sigma(A)} |p(z)|,$$

dê limitantes superiores para o número de iterações gradientes conjugados necessárias para reduzir a norma- A do erro de um fator de 10^{-3} , e também para o número de iterações gradientes conjugados necessárias para reduzir o resíduo de um fator de 10^{-3} .

8. Seja A matriz simétrica, definida positiva. Suponha que existam exatamente $k \leq N$ (N é a dimensão de A) auto-valores distintos de A . Mostre que, desta forma a iteração Gradientes Conjugados termina, no máximo em k iterações.