Aula 10
Transformação de um Problema de Valor Inicial.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Na aula de hoje, veremos como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver um problema de valor inicial.

Especificamente, considere o PVI com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by' + cy(t) = f(t), \quad y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(0) = y_1.$$

Da linearidade da transformada de Laplace, temos que

$$a\mathscr{L}\{y''(t)\} + b\mathscr{L}\{y'(t)\} + c\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{f\},$$

que envolve as transformadas de y'' e y'.

Veremos a relação de $\mathscr{L}\{y''(t)\}$ e $\mathscr{L}\{y'(t)\}$ com a transformada de y, isto é, $Y(s) = \mathscr{L}\{y''(t)\}$.

Transformada de y'

Pela definição da transformada de Laplace, temos:

$$\mathscr{L}\{y'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} y'(t) dt \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt.$$

Integrando por partes, concluímos que

$$\mathscr{L}\{y'(t)\} = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st} dt = -y(0) + s\mathscr{L}\{y(t)\}.$$

Aqui, admitimos que $\mathscr{L}\{y(t)\}$ existe e $\lim_{b\to\infty} y(t)e^{-sb} = 0$.

Observação:

Se a função y for de ordem exponencial, ou seja, se existem constantes M, c e T tais que

$$|y(t)| \leqslant Me^{ct}, \quad \forall t \geqslant T,$$

então garantimos $\lim_{b\to\infty} y(t)e^{-sb} = 0$.

Transformada de y'' e $y^(n)$

Pelo resultado anterior, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''(t)\} &= -y'(0) + s\mathscr{L}\{y'(t)\} \\
&= -y'(0) + s\left(-y(0) + s\mathscr{L}\{y(t)\}\right) \\
&= s^2\mathscr{L}\{y(t)\} - y(0)s - y'(0).
\end{aligned}$$

De um modo geral, temos

Transformada de $y^{(n)}$

Se $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$, então

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{y^{(n)}(t)\right\} &= s^n Y(s) \\
&\quad - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \ldots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Exemplo 1

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = -1.$$

Exemplo 1

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = -1.$$

Resposta: Usando a transformada de Laplace, obtemos

$$Y(s) = \frac{2s - 3}{s^2 - s - 6},$$

cuja inversa e solução do PVI é

$$y(t) = \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{7}{5}e^{-2t}.$$

Frações Parciais

No processo de inversão da transformada de Laplace é comum nos depararmos com uma função da forma

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

em que P e Q são polinômios de grau m e n, respectivamente, com $m < n$.

Nesses casos, usamos frações parciais para decompor $Y(s)$ numa soma de frações. Em termos gerais, seguimos as regras:

- O termo $(s-a)^k$ no denominador admite a forma

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(s-a)^k}.$$

- O termo irredutível $[(s-a)^2 + b^2]^k$ admite a forma:

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 s + B_2}{[(s-a)^2 + b^2]^2} + \ldots + \frac{A_k s + B_k}{[(s-a)^2 + b^2]^k}.$$

Exemplo 2

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' + 4y = \text{sen}(3t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Exemplo 2

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de

$$y'' + 4y = \text{sen}(3t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Resposta: Usando a transformada de Laplace, obtemos

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)},$$

cuja inversa e solução do PVI é

$$y(t) = \frac{3}{10}\,\text{sen}(2t) - \frac{1}{5}\,\text{sen}(3t).$$

Translação em s

Em alguns casos, o seguinte resultado também pode ser útil:

Translação em s

Se $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ existe for $s > c$, então $\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}$ existe para $s > a + c$ e satisfaz

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}y(t)\right\} = Y(s-a).$$

Equivalentemente, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s-a)\} = e^{at}y(t).$$

Em palavras, uma translação em $s \to s - a$ corresponde a multiplicar y por e^{at}.

Exemplo 3

Determine as seguintes transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\cos(\omega t)\right\} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\left\{e^{at}\,\text{sen}(\omega t)\right\}.$$

Exemplo 3

Determine as seguintes transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\cos(\omega t)\right\} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\left\{e^{at}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right\}.$$

Resposta:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\cos(\omega t)\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2},$$

e

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2},$$

ambas válidas para $s > a$.

Exemplo 4

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$\frac{1}{2}x'' + 3x' + 17x = 0, \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 1.$$

Exemplo 4

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$\frac{1}{2}x'' + 3x' + 17x = 0, \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 1.$$

Resposta: Usando a transformada de Laplace, obtemos

$$X(s) = \frac{3s + 19}{s^2 + 6s + 34},$$

cuja inversa e solução do PVI é

$$x(t) = e^{-3t}\left(3\cos(5t) + 2\sin(5t)\right).$$

Exemplo 5

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\omega t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

com $\omega_0 \neq \omega$.

Exemplo 5

Use a transformada de Laplace para determinar a solução de um sistema massa-mola descrito pelo PVI

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\omega t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

com $\omega_0 \neq \omega$.

Resposta: Usando a transformada de Laplace, obtemos

$$X(s) = \frac{F_0 \omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)}.$$

cuja inversa e solução do PVI é

$$x(t) = \frac{F_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\frac{1}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right).$$