

Aula 6

Números *Fuzzy*.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

De um modo geral, um **número** contém uma informação quantitativa precisa.

Em muitas situações práticas, porém, um valor numérico é acompanhado de imprecisões caudadas, por exemplo, por instrumentos de medida, pelos indivíduos que estão tomando a medida, pelo objeto que está sendo medido, etc.

Nestas situações, no lugar de um número real $a \in \mathbb{R}$, podemos considerar um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ que representa o termo “aproximadamente a ” ou “em torno de a ”.

Esse tipo particular de conjunto *fuzzy* é chamado **número fuzzy**.

Números *Fuzzy*

Definição 1 (Número *Fuzzy*)

Um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, definido nos reais, é um número *fuzzy* se todos os seus α -níveis são intervalos fechados, limitados e não-vazios.

Denotaremos por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ o conjunto de todos os números *fuzzy*.

Números reais e Intervalos fechados

Observe que todo número real r é um número *fuzzy* cuja função de pertinência é sua função característica

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1, & x = r, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De um modo geral, qualquer intervalo fechado e limitado $[r_l, r_s]$ é um número *fuzzy* cuja função de pertinência é sua função característica

$$\chi_{[r_l, r_s]}(x) = \begin{cases} 1, & r_l \leq x \leq r_s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Números *Fuzzy* e seus α -níveis

Como todos os α -níveis de um número *fuzzy* são intervalos fechados, denotaremos eles por

$$[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

em que a_I^α e a_S^α correspondem respectivamente ao extremo inferior e superior do intervalo.

Em particular, $[A]^1 = [a_I^1, a_S^1] \neq \emptyset$. Logo, existe pelo menos um número $x \in \mathbb{R}$ tal que $A(x) = 1$.

Especificamente, $A(x) = 1$ para todo $x \in [a_I^1, a_S^1]$.

Os números *fuzzy* mais comuns são os **triangulares**, **trapezoidais** (apresentados na Aula 2) e em **forma de sino**.

Exemplo 2

Determine os α -níveis de um número *fuzzy* triangular

$$A(x; a, m, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x \leq m, \\ (b - x)/(b - m), & m < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 2

Determine os α -níveis de um número *fuzzy* triangular

$$A(x; a, m, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x \leq m, \\ (b - x)/(b - m), & m < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: Os α -níveis são os intervalos

$$[a_I^\alpha, a_S^\alpha] = [(m - a)\alpha + a, (m - b)\alpha + b], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Exemplo 3

A expressão em torno de quatro horas pode ser modelada pelo número *fuzzy* triangular $A(x; 3.8, 4.0, 4.2)$.

Os α -níveis desse número *fuzzy* são os intervalos $[a_I^\alpha, a_S^\alpha]$ em que $a_I^\alpha = 0.2\alpha + 3.8$ e $a_S^\alpha = -0.2\alpha + 4.2$.

Exemplo 4

Determine os α -níveis de um número *fuzzy* trapezoidal

$$A(x; a, m, n, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x < m, \\ 1, & m \leq x \leq n, \\ (b - x)/(b - n), & n < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 4

Determine os α -níveis de um número *fuzzy* trapezoidal

$$A(x; a, m, n, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x < m, \\ 1, & m \leq x \leq n, \\ (b - x)/(b - n), & n < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: Os α -níveis são os intervalos

$$[a_I^\alpha, a_S^\alpha] = [(m - a)\alpha + a, (n - b)\alpha + b], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Exemplo 5

O conjunto *fuzzy* dos adolescentes pode ser representado pelo número *fuzzy* trapezoidal $A(x; 11, 14, 17, 20)$, cujos α -níveis são os intervalos

$$[3\alpha + 11, -3\alpha + 20], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Exemplo 6

Determine os α -níveis do número *fuzzy*, em forma de sino, dado pela seguinte Gaussiana limitada:

$$A(x; m, \sigma, \delta) = \begin{cases} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}, & x \in [m - \delta, m + \delta], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 6

Determine os α -níveis do número *fuzzy*, em forma de sino, dado pela seguinte Gaussiana limitada:

$$A(x; m, \sigma, \delta) = \begin{cases} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}, & x \in [m - \delta, m + \delta], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: Os α -níveis são os intervalos fechados

$$[a_I^\alpha, a_S^\alpha] = \begin{cases} \left[m - \sigma \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}}, m + \sigma \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}} \right], & \alpha \geq e^{-(\delta/\sigma)^2}, \\ [m - \delta, m + \delta], & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Representação de um Número *Fuzzy*

Teorema 7 (Representação de um Número *Fuzzy* de Ralescu-Negoita)

Considere uma família $\{I_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ de intervalos fechados, limitados e não-vazios de $\mathbb{R}$ satisfazendo

(a) $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} I_\alpha} = I_0.$

(b) Se $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, então $I_\beta \subseteq I_\alpha$,

(c) Se $\alpha_k \leq \alpha$ é uma sequência que converge para $\alpha \in (0, 1]$, então

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_k} = I_\alpha.$$

Nessas condições, existe um único número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $[A]^\alpha = I_\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

O teorema da representação de um número *fuzzy* de Ralescu-Negoita, em conjunto com a álgebra intervalar, será usada na próxima aula para definir operações aritméticas com números *fuzzy*.

Apresentaremos agora uma forma alternativa de representar um número *fuzzy*, chamada **representação LU**.

Representação LU de um Número *Fuzzy*

Um número *fuzzy* $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ pode ser descrito por duas funções $A_I, A_S : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que definem os extremos dos α -níveis de A , ou seja,

$$A_I(\alpha) = a_I^\alpha \quad \text{e} \quad A_S(\alpha) = a_S^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

em que $[a_I^\alpha, a_S^\alpha] = [A]^\alpha$.

As funções A_I e A_S , chamadas **funções inferior e superior** (tradução do inglês *lower and upper*), constituem a **representação LU** do número *fuzzy* A .

Exemplo 8

Determine a representação LU do número *fuzzy* triangular

$$A(x; a, m, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x \leq m, \\ (b - x)/(b - m), & m < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 8

Determine a representação LU do número *fuzzy* triangular

$$A(x; a, m, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x \leq m, \\ (b - x)/(b - m), & m < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: As funções inferior e superior de A são dadas pelas equações

$$A_I(\alpha) = (m - a)\alpha + a \quad \text{e} \quad A_S(\alpha) = (m - b)\alpha + b,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 9

Determine a representação LU do número *fuzzy* trapezoidal

$$A(x; a, m, n, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x < m, \\ 1, & m \leq x \leq n, \\ (b - x)/(b - n), & n < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 9

Determine a representação LU do número *fuzzy* trapezoidal

$$A(x; a, m, n, b) = \begin{cases} (x - a)/(m - a), & a < x < m, \\ 1, & m \leq x \leq n, \\ (b - x)/(b - n), & n < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: As funções inferior e superior de A são dadas pelas equações

$$A_I(\alpha) = (m - a)\alpha + a \quad \text{e} \quad A_S(\alpha) = (n - b)\alpha + b,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 10

Determine a representação LU do número *fuzzy* em forma de sino dado pela equação

$$A(x; m, \sigma, \delta) = \begin{cases} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}, & x \in [m - \delta, m + \delta], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 10

Determine a representação LU do número *fuzzy* em forma de sino dado pela equação

$$A(x; m, \sigma, \delta) = \begin{cases} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}, & x \in [m - \delta, m + \delta], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: As funções inferior e superior de A são dadas pelas equações

$$A_I(\alpha) = \begin{cases} m - \sigma \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}}, & \alpha \geq e^{-(\delta/\sigma)^2}, \\ m - \delta, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$A_S(\alpha) = \begin{cases} m + \sigma \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}}, & \alpha \geq e^{-(\delta/\sigma)^2}, \\ m + \delta, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema da Representação LU de um Número *Fuzzy*

Teorema 11 (Teorema da Representação LU de Goetschel-Voxman)

Considere funções $A_1, A_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

- (a) A_1 é limitada, crescente, contínua pela esquerda em $(0, 1]$ e contínua pela direita em 0 .*
- (b) A_2 é limitada, decrescente, contínua pela esquerda em $(0, 1]$ e contínua pela direita em 0 .*
- (c) $A_1(\alpha) \leq A_2(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Nestas condições, existe um único número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $[A]^{\alpha} = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.