

Aula 22

Introdução aos Sistemas Dinâmicos *Fuzzy*.

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Sistemas dinâmicos *fuzzy* surgem de um modo natural quando estudamos um ambiente dinâmico com incertezas (do tipo *fuzzy*!).

Por exemplo, podemos considerar o modelo de Malthus, descrito por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em que o parâmetro λ , que representa a taxa de crescimento, ou a densidade populacional inicial x_0 são números *fuzzy*.

Na aula de hoje, veremos brevemente uma abordagem para esse tipo de problema.

Problema de Valor Inicial *Fuzzy*

Um problema de valor inicial *fuzzy* (PVIF) será escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em que $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um número *fuzzy* e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

A diferença principal na modelagem de usando a teoria *fuzzy* está no modo como definimos (ou interpretamos) a derivada de uma função envolvendo conjuntos *fuzzy*.

Esse é um campo ativo de pesquisa e apresentaremos uma abordagem baseada na chamada derivada de Hukurara.

Motivação para a Derivada de Hukuhara

A derivada de uma função real $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida pela seguinte equação se o limite existir:

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Observe que um conceito chave para a derivada é a diferença $f(t+h) - f(t)$.

A derivada de Hukuhara é definida considerando uma certa diferença de números *fuzzy*!

Diferença de Hukurara

Na Aula 7, apresentamos operações aritméticas com números *fuzzy*.

Em particular, observamos que a diferença de dois números *fuzzy* pode ser diferente de zero, ou seja, $A - A \neq 0$ para certos $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

A diferença de Hukuhara é definida de modo a evitar esse problema:

Definição 1 (Diferença de Hukuhara)

A diferença de Hukuhara, denotada por “ $\ominus$ ”, é definida da seguinte forma para números *fuzzy* $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$:

$$A \ominus B = C \iff A = B + C,$$

em que $+$ denota a soma usual de números *fuzzy*.

A diferença de Hukuhara nem sempre existe. Porém, quando ela existe, seus α -níveis satisfazem

$$[A \ominus B]^\alpha = [a_I^\alpha - b_I^\alpha, a_S^\alpha - b_S^\alpha], \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

em que $[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_I^\alpha, b_S^\alpha]$.

Na prática, usamos a equação acima para calcular a diferença de Hukuhara.

Posteriormente, verificamos se o resultado é, de fato, um número *fuzzy*.

Esse estágio pode ser baseado nos teoremas da representação de Ralescu-Negoita ou Goetschel-Voxman apresentados na Aula 6.

Derivada de Hukuhara

Com base na diferença de Hukuhara, tem-se:

Definição 2 (Derivada de Hukuhara)

A derivada de Hukuhara de uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ em t é definida através da seguinte equação quando o limite existe:

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) \ominus f(t)}{h}.$$

Sendo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um número *fuzzy* para cada $t \in (a, b)$, podemos escrever

$$[f(t)]^{\alpha} = [f_I^{\alpha}(t), f_S^{\alpha}(t)], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Dessa forma, para cada α , $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é representada por duas funções $f_I^{\alpha}, f_S^{\alpha} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

O seguinte teorema apresenta uma forma para calcular a derivada de Hukuhara considerando as funções f_I^α e f_S^α :

Teorema 3

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por $[f(t)]^\alpha = [f_I^\alpha(t), f_S^\alpha(t)]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, com f_I^α e f_S^α funções continuamente diferenciáveis com respeito a t . Nesse caso, tem-se

$$\left[\frac{df}{dt}(t) \right]^\alpha = \left[\frac{df_I^\alpha}{dt}(t), \frac{df_S^\alpha}{dt}(t) \right], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Em termos gerais, resolver um PVIF com a derivada de Hukuhara consistem em resolver, para cada α , dois PVIs clássicos: um para f_I^α e outro para f_S^α !

Exemplo 4

Determine a derivada de Hukuhara da função $f(t) = At$, $t \geq 0$, em que A é um número *fuzzy* tal que $[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 4

Determine a derivada de Hukuhara da função $f(t) = At$, $t \geq 0$, em que A é um número *fuzzy* tal que $[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Resposta:

$$\frac{df}{dt}(t) = A, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 5

Determine os α -níveis da solução do modelo Malthusiano com taxa de crescimento $\lambda > 0$ e condição inicial $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Exemplo 5

Determine os α -níveis da solução do modelo Malthusiano com taxa de crescimento $\lambda > 0$ e condição inicial $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Resposta: A solução do PVI acima é uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ cujos α -níveis são

$$[x(t)]^\alpha = [x_{0I}^\alpha e^{\lambda t}, x_{0S}^\alpha e^{\lambda t}], \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

em que $[x_0]^\alpha = [x_{0I}^\alpha, x_{0S}^\alpha]$.

Exemplo 6

Determine os α -níveis da solução do modelo abaixo, que representa uma população em retração, com $\lambda > 0$ e condição inicial $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Exemplo 6

Determine os α -níveis da solução do modelo abaixo, que representa uma população em retração, com $\lambda > 0$ e condição inicial $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Resposta: A solução do PVI acima é uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ cujos α -níveis $[x(t)]^\alpha = [x_I^\alpha, x_S^\alpha]$ satisfazem para todo $\alpha \in [0, 1]$ as equações

$$\begin{aligned} x_I^\alpha &= \frac{u_{0I}^\alpha - u_{0S}^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{u_{0I}^\alpha + u_{0S}^\alpha}{2} e^{-\lambda t}, \\ x_S^\alpha &= \frac{u_{0S}^\alpha - u_{0I}^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{u_{0I}^\alpha + u_{0S}^\alpha}{2} e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

em que $[x_0]^\alpha = [x_{0I}^\alpha, x_{0S}^\alpha]$.

Desvantagem da Derivada de Hukuhara

Observe no Exemplo 6 que a o diâmetro do α -nível (tamanho do intervalo), dado por

$$\text{diam}([u(t)]^\alpha) = u_S^\alpha(t) - u_I^\alpha(t) = (u_{0S}^\alpha - u_{0I}^\alpha)e^{\lambda t}, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

é crescente com t se $u_{0I}^\alpha < u_{0S}^\alpha$, ou seja, se $u(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ não é um número real.

Essa é a maior crítica a essa abordagem. Com efeito, num problema de decaimento, espera-se que a solução seja próximo de zero quando t é suficientemente grande. Consequentemente, a incerteza deve ser nula para t grande. Isso não ocorre na solução obtida no exemplo anterior!

Atualmente, há muita pesquisa na área de “Análise *Fuzzy*” no sentido de definir derivadas que superam a desvantagem da derivada de Hukuhara.

Uma linha promissora considera aritmética de números *fuzzy* apropriadas para a definição de derivada (e integral).

Outra linha promissora consiste na aplicação da extensão de Zadeh diretamente ao operador de derivada!