

Aula 2

Conjunto *Fuzzy* como Modelador de Incerteza

MS580 - Introdução à Teoria *Fuzzy*

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Num dicionário, são muitos os sinônimos da palavra **incerteza** como: subjetividade, imprecisão, aleatoriedade, dúvida, indecisão, ambiguidade, imprevisibilidade.

Com efeito, existem vários tipos de incerteza.

A teoria *fuzzy* trata incertezas relacionadas a linguagem natural.

Abortaremos a teoria *fuzzy* introduzindo o conceito de conjuntos *fuzzy*.

Conjuntos Clássicos

Um conjunto é uma coleção de objetos que, por alguma razão, nos convém situar coletivamente como uma única entidade. Tais objetos são geralmente referidos como elementos do conjunto.

Os elementos podem ser qualquer coisa como, por exemplo, livros de uma biblioteca, números, pessoas, países, etc.

O importante é que um elemento ou pertence ou não pertence a um certo conjunto. Essa relação entre um conjunto e um elemento é chamada relação de pertinência.

Um conjunto é definido de uma das seguintes formas:

- ▶ Listando seus elementos explicitamente.

Por exemplo, $A = \{0, 1, e, \pi\}$.

Esta forma só vale para conjuntos finitos (e, pequenos...)

- ▶ Especificando uma propriedade dos seus elementos.

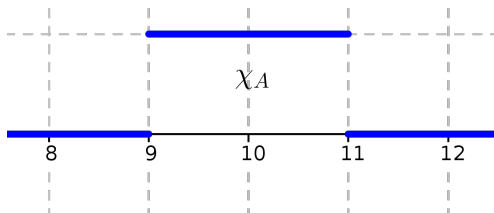
Por exemplo, $A = \{x \in \mathbb{R} : 9 \leq x \leq 11\}$.

Nas duas formas anteriores, assumimos que os elementos pertencem a um universo de discurso.

- Um conjunto também pode ser caracterizado por meio de sua **função característica** $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Por exemplo,



Conjuntos *Fuzzy*

Definição 1 (Conjunto *Fuzzy*)

Considere um universo de discurso U (conjunto clássico). Um subconjunto *fuzzy*, ou simplesmente conjunto *fuzzy*, A de U é caracterizado por uma função $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$, chamada **função de pertinência**.

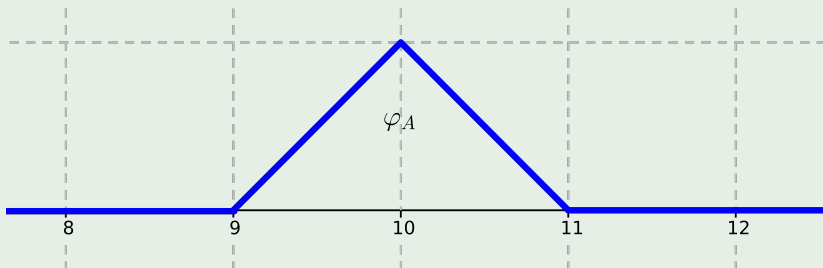
O valor $\varphi_A(x)$ indica o grau com o que elemento $x \in U$ pertence ao conjunto *fuzzy* A .

Notação:

A família de todos os conjuntos *fuzzy* de U será denotada por $\mathcal{F}(U)$.

Exemplo 2

O conjunto *fuzzy* dos “números próximos de 10” pode ser caracterizado, por exemplo, pela seguinte função de pertinência:



Observe que há uma transição gradual entre pertinência e não-pertinência!

Note que os conjuntos *fuzzy* são obtidos ampliando o contra-domínio da função característica do conjunto binário $\{0, 1\}$ para o intervalo $[0, 1]$.

Na linguagem da *fuzzy*, um conjunto clássico costuma ser denominado conjunto *crisp*.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* generaliza a teoria clássica dos conjuntos. Porém, um conjunto *fuzzy* A pode ser identificado como o seguinte conjunto clássico de pares ordenados:

$$\{(x, \varphi_A(x)) : x \in U\}.$$

Notação para Conjunto *Fuzzy*

- ▶ Como um conjunto *fuzzy* A é completamente caracterizado por sua função de pertinência φ_A .
- ▶ Uma função $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$ caracteriza um único conjunto *fuzzy* A .

Logo, é comum usar A para representar tanto a função de pertinência como o conjunto *fuzzy*.

Neste contexto, um conjunto *fuzzy* A é uma função

$$A : U \rightarrow [0, 1],$$

em que o valor $A(x)$ representa o grau com que o elemento x pertence a A .

De um modo geral, qualquer função $A : U \rightarrow [0, 1]$ é um conjunto *fuzzy*. Todavia, uma função $A : U \rightarrow [0, 1]$ é útil na teoria dos conjuntos *fuzzy* se podemos atribuir um significado plausível para ela.

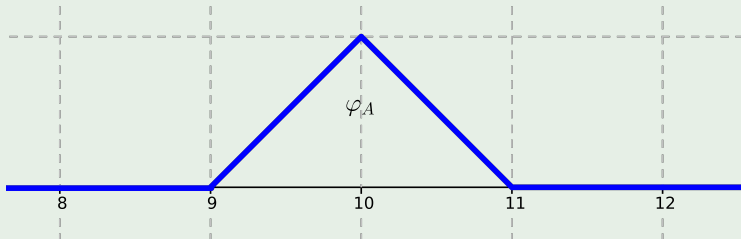
- ▶ Uma função de pertinência caracteriza um conjunto *fuzzy*, e vice-versa.
- ▶ Contudo, há uma certa arbitrariedade na escolha da função de pertinência que descrever um certo conceito.

Exemplo 3

O conjunto dos números “próximos de 10” pode ser modelado pelo conjunto *fuzzy* cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \max \{0, \min \{x - 9, 11 - x\}\}$$

cujo gráfico é

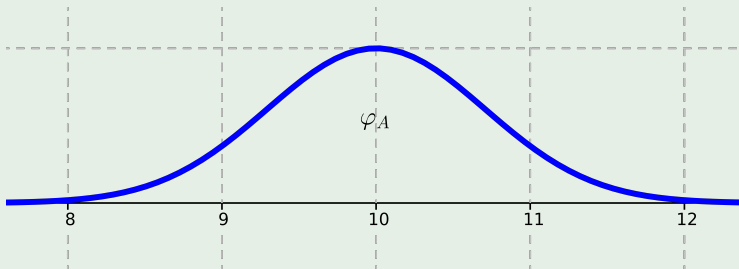


Exemplo 4

Alternativamente, o conjunto dos números “próximos de 10” poderia ser modelado pelo conjunto *fuzzy* cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = e^{-(x-10)^2}.$$

cujo gráfico é



Funções de Pertinência Típicas

Função Triangular

$$A(x; a, m, b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{m-a}, & x \in [a, m), \\ \frac{b-x}{b-m}, & x \in [m, b), \\ 0, & x \geq b, \end{cases}$$

ou

$$A(x; a, m, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{x-a}{m-a}, \frac{b-x}{b-m} \right\} \right\}.$$

Funções de Pertinência Típicas

Função Trapezoidal

$$A(x; a, m, n, b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{m-a}, & x \in [a, m), \\ 1, & x \in [m, n), \\ \frac{b-x}{b-n}, & x \in [n, b), \\ 0, & x \geq b, \end{cases}$$

ou

$$A(x; a, m, n, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{x-a}{m-a}, 1, \frac{b-x}{b-n} \right\} \right\}.$$

Funções de Pertinência Típicas

Função Gaussiana

$$A(x; m, \sigma) = e^{-(x-m)^2/\sigma^2}.$$

Função Sigmoide

$$A(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2, & x \in [a, m) \\ 1 - 2 \left(\frac{x-b}{b-a} \right)^2, & x \in [m, b) \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

em que $m = (a + b)/2$.

Número *Fuzzy*

Números *fuzzy* generalizam os números reais e, de um modo mais geral, os intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

Número *Fuzzy* (definição fraca)

Um número *fuzzy* é um conjunto *fuzzy* cuja função de pertinência $A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é da forma

$$A(x) = \begin{cases} f_A(x), & x \in [a, m), \\ 1, & x \in [m, n], \\ g_A(x), & x \in (n, b], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

em que a, m, n, b são reais tais que $a \leq m \leq n \leq b$, f_A é g_A são funções respectivamente crescente e decrescente, e geralmente contínuas.

Fuzzy × Probabilidade

A função densidade de uma variável aleatória atribui a cada elemento $x \in U$ um número representando sua probabilidade.

Exemplo 5

A função densidade $n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de uma variável aleatória com distribuição normal com média μ e variância σ^2 é dada por

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Note que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(x) dx = 1.$$

O conceito de função de pertinência φ_A generaliza a noção de função densidade não exigindo $\int_U \varphi_A(x) dx = 1$?

Exemplo 6

Suponha que você está morrendo de sede no deserto e encontra duas garrafas, A e B, com os seguintes dizeres:

A: O conteúdo desta garrafa tem **pertinência** 0,9 no conjunto dos líquidos potáveis.

B: O conteúdo desta garrafa tem **probabilidade** 0,9 no conjunto dos líquidos potáveis.

Dado que você precisa beber algo (senão você morre de sede), qual das duas garrafas você escolheria?

- ▶ Um grau de pertinência 0,9 significa que o conteúdo da garrafa A é “próximo” de um líquido potável (digamos, água pura).
Portanto, não deve fazer mal.
- ▶ A probabilidade 0,9 do conteúdo da garrafa B ser líquido potável significa que há uma chance em 10 do líquido ser veneno.

Conclusão: é preferível beber água suja que eventualmente tomar veneno.

Fuzzy × Probabilidade

Há uma diferença conceitual entre função de pertinência e função densidade.

- ▶ A função de pertinência indica, de certo modo, a compatibilidade de x com o conceito descrito por A .
- ▶ A função densidade, de certo modo, indica a frequência relativa de x em A .

A resposta da pergunta: “O conceito de função de pertinência φ_A generaliza a noção de função densidade não exigindo $\int_U \varphi_A(x) dx = 1$?” é não!
Com efeito, pode-se definir a probabilidade de um evento *fuzzy*!

Conjuntos *Fuzzy* Generalizados

De um modo geral, um termo pode ter significados diferentes para pessoas diferentes.

Exemplo 7

Por exemplo, o termo “próximo de 10” pode significar uma função linear por partes ou uma Gaussiana.

Em vista disso, pode haver incerteza na função de pertinência da função “próximo de 10”.

Conjuntos *Fuzzy* Intervalares

Num conjunto *fuzzy* intervalar, a pertinência de um elemento é descrita por um intervalo $I \subseteq [0, 1]$.

Conjunto Fuzzy Intervalar

Um conjunto *fuzzy* intervalar é descrito por uma função de pertinência $A : U \rightarrow \mathbb{I}$ em que $\mathbb{I}$ denota o conjunto de todos os intervalos fechados de $[0, 1]$.

Observação:

Um conjunto *fuzzy* intervalar pode ser escrito como $A = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$, em que $\underline{A}$ e $\overline{A}$ são conjuntos *fuzzy* tradicionais tais que $\underline{A}(x) \leq \overline{A}(x)$ para todo $x \in U$.

Conjuntos *Fuzzy* do Tipo 2

Num conjunto *fuzzy* do tipo 2, a pertinência de um elemento é descrita por um número *fuzzy*.

Conjunto Fuzzy Tipo 2

Um conjunto *fuzzy* do tipo 2 é descrito por uma função de pertinência $A : U \rightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{F}}$ em que $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}$ denota o conjunto de todos os números *fuzzy* de $[0, 1]$, isto é, números *fuzzy* tais que $0 \leq a \leq b \leq 1$.