



# Análise Real e Elementos de Análise Real

*Exame: 15 de Dezembro de 2010*

Nome: \_\_\_\_\_

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Q6	
Total	

As questões serão consideradas somente se os argumentos forem apresentados de forma lógica e matematicamente corretos.  
BOA PROVA!!!

**Questão 1** (Propriedade de Aproximação). Seja  $S \subseteq \mathbb{R}$  um conjunto não-vazio com supremo, digamos  $s = \sup S$ . Mostre que, para todo  $a < s$ , existe  $x \in S$  tal que  $a < x \leq s$ .

**Questão 2** (Representação Decimal Finita). Um número real da forma

$$r_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \quad (1)$$

onde  $a_0$  é um inteiro e  $a_1, \dots, a_n$  são inteiros tais que  $0 \leq a_i \leq 9$  é geralmente escrito na forma

$$r_n = a_0.a_1a_2 \dots a_n,$$

chamada *representação decimal finita* de  $r_n$ . Mostre que, se um número  $r_n$  é dado por uma decimal finita (1), então  $r_n \in \mathbb{Q}$ . Mostre também que a recíproca é falsa.

**Questão 3.** Seja  $f : S \rightarrow T$  uma função. Dados subconjuntos arbitrários  $A, B \subseteq S$ , mostre que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{e} \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

**Questão 4.** Considere uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  cujos coeficientes estão relacionados através da seguinte equação:

$$a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0, \quad \forall n = 2, 3, \dots$$

Mostre que, para todo  $x$  no qual a série converge, tem-se que a soma da série é:

$$\frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$

**Questão 5.** Seja  $I = [0, 1]$  o intervalo unitário fechado em  $\mathbb{R}$ . Suponha que  $f : I \rightarrow I$  é uma função contínua. Mostre que existe  $x \in I$  tal que  $f(x) = x$ .

**Questão 6.** Seja  $f$  uma função tal que sua derivada é definida e satisfaz  $|f'(x)| < 1$  para todo  $x$  no intervalo  $0 < x \leq 1$ . Defina a sequência  $a_n = f(1/n)$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , e mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe.

**Dica:** Use o critério de Cauchy.