

# Análise Real e Elementos de Análise Real

*Primeira Avaliação – 14 de Abril de 2010*

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

Nome: \_\_\_\_\_

**Questão 1.** Mostre que  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  é um número irracional.

**Dica:** Use o fato de que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado com respeito as operações usuais de soma e multiplicação. Use também o fato de que  $\sqrt{p}$  é um número irracional se  $p$  for um número primo.

**Questão 2** (Propriedade de Aproximação). Seja  $S \subseteq \mathbb{R}$  um conjunto não-vazio com supremo, digamos  $s = \sup S$ . Mostre que, para todo  $a < s$ , existe  $x \in S$  tal que  $a < x \leq s$ .

**Questão 3.** Seja  $S$  a família de todas as sequências cujos termos são os inteiros 0 e 1. Mostre que  $S$  é não-enumerável.

**Questão 4.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e defina

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Mostre que  $0 \leq d'(x, y) < 1$  para todo  $x, y \in M$ . Além disso, mostre que  $d'$  é também uma métrica em  $M$ .

**Dica:** Para demonstrar a desigualdade triangular, mostre que a função  $f(x) = x/(1+x)$ , definida para todo  $x \geq 0$ , é crescente e, portanto,  $f(x) \leq f(y)$  se  $x \leq y$ .

**Questão 5.** Mostre que a união de qualquer coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

As questões serão consideradas somente se forem apresentados todos os argumentos necessários.  
BOA PROVA!!!