

# Análise Real e Elementos de Análise Real

Terceira Prova – 30 de Junho de 2010

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

Nome: \_\_\_\_\_

**Questão 1** (Teste da Comparação no Limite). Suponha que  $a_n > 0$  e  $b_n > 0$  para todo  $n = 1, 2, \dots$  são tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Mostre que  $\sum a_n$  converge se, e somente se,  $\sum b_n$  converge.

**Questão 2.** Mostre que a série a seguinte converge se  $p > 1$  e diverge se  $0 < p \leq 1$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

**Questão 3.** Mostre que uma série  $\sum a_n$  converge absolutamente se

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R < 1.$$

**Questão 4.** Considere uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  cujos coeficientes estão relacionados através da seguinte equação:

$$a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0, \quad \forall n = 2, 3, \dots$$

Mostre que, para todo  $x$  no qual a série converge, tem-se que a soma da série é:

$$\frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$

**Questão 5.** Investigue o comportamento (convergência ou divergência) das seguintes séries:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n) \quad \text{e} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

Justifique sua resposta.

As questões serão consideradas somente se forem apresentados todos os argumentos necessários.

BOA PROVA!!!