



Análise Real e Elementos de Análise Real

Quinta Prova: 27 de Outubro de 2010

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

Nome: _____
(COLOQUE O NOME EM TODAS AS FOLHAS QUE USAR!)

Questão 1. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|g'(x)| \leq M$ para todo x no domínio de g . Dado $\varepsilon > 0$, defina $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. Mostre que f é injetora se ε for suficientemente pequeno.

Questão 2. Suponha que $f'(x)$ e $g'(x)$ existam, com $g'(x) \neq 0$, e $f(x) = g(x) = 0$. Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Questão 3. Mostre que o polinômio $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $(0, 1)$ se

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Questão 4. Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua em todo intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , com $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ para todo $x \in (a, b)$. Mostre que f possui um único ponto fixo em $[a, b]$, ou seja, existe um único $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Questão 5. Suponha que f tem derivada finita em (a, b) e é contínua em $[a, b]$ com $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que para todo real λ existe algum c em (a, b) tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

Dica: Aplique o teorema do valor médio no produto $g(x)f(x)$ para uma certa função g que depende de λ .

As questões serão consideradas somente se forem apresentados os cálculos necessários.

BOA PROVA!!!