



# Análise Real e Elementos de Análise Real

*Sexta Prova: 24 de Novembro de 2010*

Nome: \_\_\_\_\_  
(COLOQUE O NOME EM TODAS AS FOLHAS QUE USAR!)

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

As questões serão consideradas somente se os argumentos forem apresentados de forma lógica e matematicamente corretos.  
BOA PROVA!!!

**Questão 1.** Mostre que, se  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  em  $[a, b]$  e existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , então

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M [\alpha(b) - \alpha(a)].$$

**Questão 2.** Suponha que  $f$  é uma função real limitada em  $[a, b]$ . Se  $f^2 \in \mathcal{R}$  em  $[a, b]$ , podemos afirmar que  $f \in \mathcal{R}$ ? E se  $f^3 \in \mathcal{R}$ , tem-se  $f \in \mathcal{R}$ ? Justifique sua resposta usando os teoremas apresentados no livro texto ou utilizando contra-exemplos!

**Questão 3.** Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

não é integrável no sentido Riemman em nenhum intervalo fechado  $[a, b]$  com  $a < b$ .

**Questão 4.** Mostre que, se  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  em  $[a, b]$  e se  $a < c < b$ , então  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  tanto em  $[a, c]$  como  $[c, b]$ , e vale a equação:

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

**Questão 5.** Seja  $\alpha$  uma função monótona crescente em  $[a, b]$  e seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Suponha que ambas  $\alpha$  e  $f$  possuam uma descontinuidade pela direita no ponto  $c$ , onde  $a < c < b$ . Formalmente, suponha que existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , existam  $x, y \in (c, c + \delta)$  para os quais

$$|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon \quad \text{e} \quad |\alpha(y) - \alpha(c)| \geq \varepsilon.$$

Mostre que a integral  $\int_a^b f d\alpha$  não existe.