

Análise Real e Elementos de Análise Real

Segunda Avaliação – 26 de Maio de 2010

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

Nome: _____

Questão 1. Seja (X, d) um espaço métrico e $E \subseteq X$. Mostre que o conjunto de todos os pontos de acumulação de E , denotado por E' , é um conjunto fechado.

Questão 2. Apresente uma cobertura aberta para o intervalo aberto $(0, 1)$ que não admite uma subcobertura finita. Conclua que $(0, 1)$ não é um conjunto compacto em \mathbb{R} .

Questão 3. Considere sequências de inteiros positivos $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ definidas recursivamente tomando $a_1 = b_1 = 1$ e igualando as partes racionais e irracionais da seguinte equação para $n \geq 2$:

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2.$$

Mostre que $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ para $n \geq 2$. Conclua que $a_n/b_n \rightarrow \sqrt{2}$ por valores maiores que $\sqrt{2}$ e que $2b_n/a_n \rightarrow \sqrt{2}$ por valores menores que $\sqrt{2}$.

Questão 4. Seja (X, d) um espaço métrico e $\{p_n\}$ uma sequência em X . Mostre que $\{p_n\}$ converge para $p \in X$ se, e somente se, todas as subsequências de $\{p_n\}$ convergem para p . Use esse fato para mostrar que a sequência $\{p_n\}$ converge se, e somente se, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ são ambos finitos e iguais.

Questão 5. Mostre que a sequência de números reais definida abaixo converge.

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

As questões serão consideradas somente se forem apresentados todos os argumentos necessários.
BOA PROVA!!!