

# Análise Real e Elementos de Análise Real

22 de Setembro de 2010

	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Total	

Nome: \_\_\_\_\_  
(COLOQUE O NOME EM TODAS AS FOLHAS QUE USAR!)

**Questão 1.** Sejam  $(a, b)$  um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$ ,  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x \in (a, b)$ . Considere as seguintes afirmações:

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = 0,$  (1)

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0.$  (2)

Mostre que a) sempre implica b) e dê um exemplo na qual b) vale mas a) não é válido.

**Questão 2.** Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espaços métricos. Suponha que  $f : X \rightarrow Y$  é uma bijeção de modo que a inversa  $f^{-1}$  exista. Mostre que, se  $X$  é compacto e  $f$  é contínua em  $X$ , então  $f^{-1}$  é uma função contínua em  $Y$ .

**Questão 3.** Seja  $I = [0, 1]$  o intervalo unitário fechado em  $\mathbb{R}$ . Suponha que  $f : I \rightarrow I$  é uma função contínua. Mostre que existe  $x \in I$  tal que  $f(x) = x$ .

**Questão 4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e suponha que existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  na qual a função  $f$  é contínua. Suponha também que, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  satisfaz a equação  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . Mostre que existe uma constante  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Dica:** Mostre primeiro que se  $f$  é contínua em  $x_0 \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é contínua em todo  $x \in \mathbb{R}$ . Depois, mostre que  $f(n) = an$  para todo inteiro positivo  $n$ . Finalmente, mostre que  $f(q) = aq$  para todo  $q \in \mathbb{Q}$  e use a continuidade de  $f$  para concluir que  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Questão 5.** Sejam  $(X, d)$  e  $(Y, d)$  espaços métricos. Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita *Lipschitz contínua em  $X$*  se existe uma constante real positiva  $k$  tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq kd_X(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Mostre que, se  $f : X \rightarrow Y$  é Lipschitz contínua em  $X$ , então  $f$  é também *uniformemente contínua* em  $X$ . Verifique que a recíproca não é verdadeira considerando a função real  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \sqrt{x}$ .

As questões serão consideradas somente se forem apresentados os cálculos necessários.  
BOA PROVA!!!