LIÇÃO 4

QUANTIFICADORES

Existem frases declarativas que não há como decidir se são verdadeiras ou falsas. Por exemplo:

(a) Ele é um campeão da Fórmula 1.

(b) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

(c) x é um país.

(d) Ele e ela são alunos da Matemática.

(e) $x + y = 10$.

Observe que " Ele", "Ela", "x", e "y" são variáveis que podem ser substituídas por um elemento arbitrário, tornando a frase verdadeira ou falsa. Sendo assim, estas frases tornam-se proposições somente depois de atribuirmos valores as suas variáveis. Por exemplo, no item (a), se no lugar de "Ele" colocarmos "Ayrton Senna", teremos uma proposição verdadeira. Porém, se colocarmos "Pelé", a proposição obtida será falsa. Analogamente, no item (b), se $x = 1$ então $1^2 - 2.1 + 1 = 0$, ou seja, a proposição será verdadeira; por outro lado, se $x = 0$ então $(0)^2 - 2(0) + 1 \neq 0$, neste caso, a proposição será falsa.

Estas frases declarativas são denominadas de *funções proposicionais* ou *proposições abertas*. Denotamos por $p(x)$ uma proposição aberta que depende da variável $x \in A$, em que A é um conjunto, chamado de *universo de discurso*.

Na matemática é comum a utilização do quantificador existencial: *"existe"*, do quantificador universal: *"para todo"* , *"para qualquer"* ou *"qualquer que seja"* para transformar uma proposição aberta em uma proposição. Por exemplo:

(a) Existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + 1 = 0$.

(b) Para todo $x \in \mathbb{N}$ temos que $x + 1 \neq 0$.

(c) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 = 0$.

(d) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 + 1 \neq 0$.

De um modo geral, podemos escrever esta classe de proposições da seguinte maneira:

$$\text{Existe } x \in A \text{ tal que } p(x). \tag{4.1}$$

$$\text{Para todo } x \in A \text{ temos que } p(x). \tag{4.2}$$

A proposição (4.1) será verdadeira se existe pelo menos um elemento x do conjunto A que satisfaz a condição $p(x)$. Caso contrário, ou seja, se para todo $x \in A$ a condição $p(x)$ não é satisfeita, então a proposição (4.1) será falsa. Do mesmo modo, a proposição (4.2) será verdadeira se $p(x)$ é satisfeita para todo $x \in A$, e será falsa se existe pelo menos um $x \in A$ tal que a condição $p(x)$ não é satisfeita.

Exemplo 4.1. Verifique a falsidade ou veracidade das proposições:

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 > 0$.
Solução: Esta proposição é falsa, pois $0 \in \mathbb{R}$ e $0^2 \not> 0$. A sua negação, que é uma proposição verdadeira, é dada por: "Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 \not> 0$".

(b) Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x - 1 = 0$.
Solução: $1 \in \mathbb{N}$ e $1 - 1 = 0$. Portanto, a proposição é verdadeira.

(c) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 + 1 \neq 0$.
Solução: Para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, deste modo, $x^2 + 1 \geq 1$, ou seja, $x^2 + 1 \neq 0$. Portanto, esta proposição é verdadeira.

(d) Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 + 2x + 1 = 0$.
Solução: A equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ pode ser escrita na forma $(x + 1)^2 = 0$; consequentemente, $x = -1$ é uma raiz de multiplicidade dois, sendo assim, não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 + 2x + 1 = 0$. Portanto, a proposição é falsa. Sua negação, dada por: "Para todo $x \in \mathbb{N}$ temos que $x^2 + 2x + 1 \neq 0$", é uma proposição verdadeira.

Utilizaremos o símbolo "$\exists$", que se lê: "existe", para o quantificador existencial. O símbolo "$\forall$", que se lê: "para todo", "para qualquer" ou "qualquer que seja", é usado para denotar o quantificador universal. Note que, o símbolo de existência é o "E" invertido da palavra inglesa "Exists", cuja tradução é "existe". O símbolo para o quantificador universal é o "A" de cabeça para baixo da palavra inglesa "All", cuja tradução é "todo". Deste modo, as proposições em (4.1) e (4.2) podem ser reescritas apenas utilizando símbolos matemáticos como segue:

$$\exists\, x \in A : p(x) \quad (\textit{que se lê: existe } x \textit{ em } A \textit{ tal que } p(x)). \tag{4.3}$$

$$\forall\, x \in A,\ p(x) \quad (\textit{que se lê: para todo } x \textit{ em } A \textit{ temos } p(x)). \tag{4.4}$$

Exemplo 4.2 (Universo de Discurso Finito)**.** Suponha que o universo de discurso $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n\}$ é um conjunto finito com n elementos. Nesse caso, a proposição

$$\forall\, x \in A,\ p(x),$$

que é verdadeira se a proposição aberta $p(x)$ for verdadeira para todo $x \in A$, é equivalente a conjunção:

$$p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \ldots \wedge p(a_n).$$

Dualmente, a proposição

$$\exists\, x \in A : p(x),$$

que é verdadeira se $p(x)$ é verdadeira para pelo menos um $x \in A$, corresponde a disjunção:

$$p(a_1) \vee p(a_2) \vee p(a_3) \vee \ldots \vee p(a_n).$$

Exemplo 4.3 (Universo de Discurso Vazio)**.** Considere agora o caso em que o universo de discurso não contém nenhum elemento, ou seja, $A = \emptyset$. Nesse caso, independente da proposição aberta $p(x)$, tem-se

$$\forall\, x \in A,\ p(x) \text{ é verdadeira},$$

$$\exists\, x \in A : p(x) \ \text{ é falsa}.$$

Por exemplo, considere as proposições "Todas as vacas voadoras comem rãs" e "Existe uma vaca voadora que come rãs". Nesses exemplos, a proposição aberta $p(x)$ é verdadeira se a vaca x se alimentar de rãs. O universo de discurso é o conjunto de todas as vacas voadoras, que é vazio, pois não existem vacas voadoras. A afirmação "Todas as vacas voadoras comem rãs" será falsa se encontramos uma vaca voadora que não come rãs. Contudo, como certamente não podemos encontrar uma vaca voadora que não gosta de rã, a afirmação é verdadeira. Similarmente, a proposição "Existe uma vaca voadora que come rãs" é verdadeira se encontramos uma vaca voadora que se alimenta de rãs. Porém, não podemos encontrar tal vaca voadora. Logo, essa proposição é falsa.

4.1 Negação de Proposições com Quantificador

As negações das proposições (4.3) e (4.4) são dadas por:

$$\neg\big(\exists x \in A : p(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ \neg p(x). \tag{4.5}$$

$$\neg\big(\forall x \in A, p(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in A : \neg p(x). \tag{4.6}$$

A proposição "$\exists x \in A : p(x)$", em alguns casos, pode ser verdadeira para um único $x \in A$. Por exemplo, $\exists x \in \mathbb{N} : x - 1 = 0$. Quando isto ocorre, é comum escrever esta proposição da seguinte maneira: "$\exists!\, x \in A : p(x)$", que se lê: "existe um único x em A que satisfaz $p(x)$", o símbolo $\exists!$ denota a existência e unicidade.

Exemplo 4.4. Analise a veracidade ou falsidade das seguintes proposições:

(a) $\exists!\, x \in \mathbb{N} : x - 1 = 0$.
Solução: O número 1 é o único natural que satisfaz a equação $x - 1 = 0$. Logo, esta proposição é verdadeira.

(b) $\exists!\, x \in \mathbb{Z} : x^2 - 1 = 0$.
Solução: Os números $-1, 1 \in \mathbb{Z}$ satisfazem a equação $x^2 - 1 = 0$. Portanto, esta proposição é falsa, pois não temos a unicidade. Já a proposição $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 1 = 0$ é verdadeira.

(c) $\forall\, x \in \mathbb{Z}, x^2 - x - 2 \neq 0$.
Solução: É falsa, pois $2 \in \mathbb{Z}$ e $2^2 - 2 - 2 = 0$. Porém, sua negação, dada por: "$\exists\, x \in \mathbb{Z}$: $x^2 - x - 2 = 0$", é verdadeira.

(d) $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 2 = 0$.
Solução: Note que, $\Delta = 2^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$. Assim sendo, a equação do segundo grau $x^2 + 2x + 2 = 0$ não tem solução no conjunto

dos números reais e, portanto, esta proposição é falsa. Sua negação, dada por "$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 2 \neq 0$", é verdadeira.

(e) $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = x - 1$.
Solução: Observe que, $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \frac{(x+1)}{(x+1)}(x-1)$ somente será igual a $(x-1)$ se $x \neq -1$, pois neste caso, $\frac{(x+1)}{(x+1)} = 1$. Como $x \in \mathbb{N}$, segue que, $x \neq -1$ e, portanto, a proposição é verdadeira.

(f) $\exists\, x \in \mathbb{Q}$: $x^2 = 2$.
Solução: Os números irracionais $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são as únicas soluções para a equação $x^2 = 2$. Portanto, não existe x racional que satisfaça a referida equação, ou seja, a proposição é falsa. Sua negação, dada por "$\forall\, x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq 2$", é verdadeira.

4.2 Interpretações e Sutilezas da Linguagem

Nessa seção ilustramos como podemos expressar algumas funções proposicionais quantificadas comuns em português em termos formais. Além disso, ressaltamos alguns detalhes que são comumente adotados na linguagem coloquial. Por fim, apresentamos exemplos de proposições com mais de um quantificador.

Exemplo 4.5. Considere a afirmação:

Se a é par, então a^2 é também par.

Nessa afirmação, muito comum na linguagem coloquial, está implícito tanto o universo de discurso como o quantificador universal. Com efeito, o correto seria escrever:

Para todo $a \in \mathbb{Z}$, se a é par, então a^2 também é par.

Exemplo 4.6. Considere a afirmação:

"Todos os estudantes de matemática gostam de lógica". (4.7)

Essa afirmação envolve o quantificador universal "para todo". O universo de discurso A é o conjunto de todos os estudantes. A função proposicional $p(x)$ é verdadeira se $x \in A$ é um estudante de matemática. Nessa afirmação temos também o função proposicional $q(x)$ que é verdadeira se

$x \in A$ gosta de lógica. Podemos pensar, erroneamente, que a afirmação (4.7) é expressa em termos formais como

$$\forall\, x \in A, p(x) \wedge q(x). \tag{4.8}$$

Todavia, (4.8) corresponde a dizer "Todo estudante é da matemática e gosta de lógica", que é bem diferente da afirmação inicial (4.7). Com efeito, nem todo estudante é da matemática; existem estudantes de medicina, direito, administração, etc. A expressão formal correta para (4.7) é:

$$\forall\, x \in A, p(x) \to q(x).$$

Em palavras, temos "Para todo estudante, se o estudante é da matemática, então este estudante gosta de lógica".

Exemplo 4.7. Vamos agora considerar a afirmação obtida substituindo o quantificador "para todo" por "existe" em (4.7):

"Alguns estudantes de matemática gostam de lógica". (4.9)

Podemos pensar que a afirmação (4.9) é expressa em termos formais como

$$\exists\, x \in A : p(x) \to q(x). \tag{4.10}$$

Contudo, essa expressão está errada pois pode acontecer de não haver estudantes de matemática no nosso conjunto de estudantes (o curso de matemática não vem sendo muito procurado nos últimos anos e, dos poucos alunos ingressantes, muitos desistem durante o curso de lógica). Nesse caso, a proposição (4.10) é verdadeira enquanto que (4.9) é verdadeira somente se existe pelo menos um estudante de matemática que gosta de lógica. Com efeito, a forma correta de expressar (4.10) é:

$$\exists\, x \in A : p(x) \wedge q(x), \tag{4.11}$$

que, em palavras, corresponde à dizer: "Existe pelo menos um estudante que é da matemática e gosta de lógica".

Exemplo 4.8 (Fixo mas arbitrário)**.** Considere a afirmação:

Seja a um número inteiro. Se a é par, então a^2 é também par.

Na primeira frase, temos que a é um número inteiro fixo mas sem nenhuma característica que os difere dos demais números inteiros. Portanto, se vale para ele, vale também para qualquer outro inteiro. Portanto, a palavra "seja" pode ser interpretada como o quantificador universal "para todo". Nesse caso, a afirmação acima corresponde à: "Para todo $a \in \mathbb{Z}$, se a é par, então a^2 é par". Esse é um exemplo do conceito amplamente usado no qual temos uma variável que é fixa mas arbitrária.

Exemplo 4.9 (Uma Proposição com Mais de um Quantificador)**.** Seja A e o conjunto de todas as pessoas e $p(x,y)$ a proposição que é verdadeira se y é a mãe de x. Por um lado, a proposição

$$\forall\, x \in A, \exists\, y \in A : p(x,y),$$

corresponde a dizer que toda pessoa possui uma mãe. Note que nesse caso temos uma proposição com dois quantificadores. Por outro lado, a proposição

$$\exists\, y \in A : \forall x \in A, p(x,y),$$

que também possui dois quantificadores, é equivalente a dizer que existe uma pessoa que é mãe de todos. Observe que as duas proposições são totalmente diferentes. Logo, a ordem dos quantificadores altera completamente o significado de uma proposição.

Exemplo 4.10 (Negação de uma Proposição com Mais de um Quantificador)**.** Considere a seguinte afirmação:

"Para todo cão no sofá existe uma pulga no carpete
que o mordeu se ele for um cão preto". (4.12)

Em linguagem simbólica, essa afirmação corresponde à proposição:

$$\forall\, x \in A, \exists\, y \in B : p(x) \to q(x,y), \tag{4.13}$$

em que A é o conjunto de todos os cães no sofá, B é o conjunto de todas as pulgas no carpete, $p(x)$ é a proposição: "x é um cão preto" e $q(x,y)$ é a proposição: "a pulga y mordeu o cão x".

A negação da proposição (4.13), deduzida usando respectivamente (4.6), (4.5), a equivalência $p \to q \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ e as Leis de De Morgan, é:

$$\begin{aligned}
&\neg\big[\forall\, x \in A, \exists\, y \in B : p(x) \to q(x,y)\big] \\
\Leftrightarrow\;\; &\exists\, x \in A : \neg\big[\exists\, y \in B : p(x) \to q(x,y)\big] \\
\Leftrightarrow\;\; &\exists\, x \in A : \forall\, y \in B, \neg\big[p(x) \to q(x,y)\big] \\
\Leftrightarrow\;\; &\exists\, x \in A : \forall\, y \in B, \neg\big[\neg p(x) \vee q(x,y)\big] \\
\Leftrightarrow\;\; &\exists\, x \in A : \forall\, y \in B, p(x) \wedge \neg q(x,y)\big].
\end{aligned}$$

Em palavras, temos a afirmação "Existe um cão no sofá tal que, para toda pulga no carpete, o cão é preto e a pulga não o mordeu". De forma mais breve, "Existe um cão preto no sofá que não foi mordido por pulgas".

Com base na negação, podemos responder diversas perguntas sobre a afirmação inicial:

(a) O que podemos dizer sobre a veracidade de (4.12) se não há um cão preto no sofá?

Solução: A proposição é verdadeira pois, para ela ser falsa, deve haver um cão preto que não foi mordido por pulgas.

(b) A proposição (4.13) será verdadeira se uma pulga morder todos os cães?

Solução: Sim, pois $q(x, y)$ será verdadeira para todo cão x.

(c) A proposição (4.12) será verdadeira houver um cão preto que não foi mordido?

Solução: Não, pois a negação de (4.13) será verdadeira.

(d) O que podemos dizer sobre a veracidade de (4.12) se não há pulgas no carpete?

Solução: Por falta de informação, essa pergunta não pode ser respondida. Com efeito, temos os seguintes casos:

(i) Se existe pelo menos um cão preto no sofá, então ela será falsa.

(ii) Se não existe nenhum cão preto no sofá, então ela será verdadeira.

Este exemplo ilustra o tipo de questões que devemos ser capaz de responder sobre uma função proposicional com quantificadores.

4.3 Exercícios Propostos

Exercício 4.1. Verifique que as proposições abaixo são falsas e faça a sua negação.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 1 > 0$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 < 0$.

(c) $\exists n \in \mathbb{N} : n + 1 = 0$.

(d) $\forall n \in \mathbb{Z}, cos(\frac{\pi}{2} + n) \neq 0$.

(e) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$.

(f) $\forall m \in \mathbb{Z}, sen(m\frac{\pi}{2}) = 0$.

(g) $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 = 0$.

(h) $\exists k \in \mathbb{Z} : cos(k\pi) = 0$.

Exercício 4.2. Utilize os quantificadores para transformar as proposições abertas em verdadeiras no conjunto dos números reais.

(a) $\sqrt[3]{x^3} = x$.

(b) $\sqrt{x^2} = x$.

(c) $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$.

(d) $x^2 + 2x + 2 \neq 0$.

(e) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

(f) $\dfrac{a^3 - 2a^2 - a}{a} = a^2 - 2a - 1$.

(g) $\text{sen}(x + y) = 0$.

(h) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

Exercício 4.3. Escreva em linguagem simbólica as seguintes afirmações e determine sua veracidade.

(a) "Todo inteiro é par ou ímpar".

(b) "Todo inteiro é par ou todo inteiro é ímpar".

As duas afirmações são equivalentes? Justifique sua resposta.

Exercício 4.4. Escreva em linguagem simbólica cada uma das seguintes afirmações esclarecendo o significado de cada proposição atômica e do(s) universo(s) de discurso.

(a) "Existe um inteiro n tal que $4 = n + 2$".

(b) "Para qualquer inteiro n, $4 = n + 2$".

(c) "Qualquer triangulo equilátero é equiangular".

(d) "Todos os estudantes gostam de lógica".

(e) "Alguns estudantes não gostam de lógica".

(f) "Todo mundo que compreende lógica gosta dela".

(g) "Cada pessoa tem uma mãe".

(h) "Alguns inteiros são pares e divisíveis por 3".

(i) "Alguns inteiros são pares ou divisíveis por 3".

(j) "Pelo menos uma letra da palavra 'banana' é vogal".

(k) "$x^2 - 4 = 0$ possui uma solução positiva".

(l) "Toda solução de $x^2 - 4 = 0$ é positiva".

(m) "Um dos candidatos será o vencedor".

(n) "Para todo inteiro n, existe um inteiro k tal que $n = 2K$".

(o) "Se todo inteiro é ímpar, então todo inteiro é par".

(p) "Todo mundo ama alguém um dia".

(q) "Dentre todas as pulgas no carpete, existe uma que mordeu todos os cães no sofá".

(r) "Para todo inteiro n, existe um outro inteiro maior que $2n$".

(s) "A soma de quaisquer dois inteiros impares é ímpar".

Escreva em português a negação de cada uma dessas proposições.

Exercício 4.5. Apresente um exemplo para cada uma das seguintes proposições e determine sua veracidade.

(a) $\exists\, x \in A : \big[p(x) \wedge q(x)\big]$.

(b) $\big[\exists\, x \in A : p(x)\big] \wedge \big[\exists\, x \in A : q(x)\big]$.

As duas proposições são equivalentes? Justifique sua resposta.

Exercício 4.6. Considere a afirmação:

> "Para toda galinha no galinheiro e para toda cadeira na cozinha, existe uma frigideira no armário tal que, se o ovo da galinha está na frigideira, então a galinha está a menos de 2 metros da cadeira".

Escreva essa afirmação em linguagem simbólica e descreva, em português, sua negação.

Exercício 4.7. Dê exemplos para mostrar que as seguintes bicondicionais são falsas:

(a) $\Big[\big(\forall x \in A, p(x)\big) \vee \big(\forall x \in A, q(x)\big)\Big] \leftrightarrow \Big[\forall x \in A, \big(p(x) \vee q(x)\big)\Big]$.

(b) $\Big[\big(\exists x \in A : p(x)\big) \wedge \big(\exists x \in A : q(x)\big)\Big] \leftrightarrow \Big[\exists x \in A : \big(p(x) \wedge q(x)\big)\Big]$.

(c) $\Big[\big(\forall x \in A, p(x)\big) \rightarrow \big(\forall x \in A : q(x)\big)\Big] \leftrightarrow \Big[\forall x \in A : \big(p(x) \rightarrow q(x)\big)\Big]$.