

# Lista 9 - Sistemas de Equações Não-Lineares

**Exercício 1.** Expresse as iterações de Newton para cada um dos seguintes sistemas de equações não-lineares:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases} \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 = 9, \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 = 4. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2 - 2x_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 = -1. \end{cases} \quad \text{d)} \quad \begin{cases} x_1^3 - x_2^2 = 0, \\ x_1 + x_1^2 x_2 = 2. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} 2\sin(x_1) + \cos(x_2) - 5x_1 = 0, \\ 4\cos(x_1) + 2\sin(x_2) - 5x_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

**Exercício 2.** Efetue uma iteração do método de Newton aplicado ao sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1 x_2 = 1. \end{cases}$$

com aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1]^T$ .

**Exercício 3.** Modifique o método de Newton de modo que ele possa ser usado para determinar a inversa de uma matriz não-singular  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  considerando a função  $F : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  definida como segue:

$$F(X) = I - AX.$$

Observe que a inversa  $A^{-1}$  deve ser aproximada por  $X^{(k)}$  na iteração de Newton. Mostre que, ainda assim, tem-se convergência quadrática pois o resíduo  $R^{(k)} = I - AX^{(k)}$  e o erro  $E^{(k)} = A^{-1} - X^{(k)}$  satisfazem as equações

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} \quad \text{e} \quad E^{(k+1)} = E^{(k)} A E^{(k)}.$$

**Exercício 4.** O método de Newton pode ser usado para determinar o autovalor  $\lambda$  associado à um autovetor  $\mathbf{x}$  de uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Precisamente, defina  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  como segue:

$$F(\lambda, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que a raiz de  $F$  é exatamente um auto-par de  $A$ . Determine a matriz Jacobiana de  $F$  estabeleça a iteração de Newton desse sistema de equações não-lineares.