

Lista 5 - Sistemas de Equações Não-Lineares

Exercício 1. Descreva como o método da relaxação simultânea aplicado para determinar uma raiz da função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa uma matriz não-singular. Que condições devemos impor sobre λ e A para termos a convergência do método?

Exercício 2. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não-singular. O método do ponto fixo pode ser aplicado para resolver esse sistema escrevendo a matriz A como uma soma de duas outras matrizes $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, i.e., $A = A_1 + A_2$, onde A_1 é uma matriz não-singular cuja inversa pode ser determinada de forma fácil. Dessa forma, a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrita no problema de ponto fixo $\mathbf{x} = G(\mathbf{x}) = A_1^{-1}(\mathbf{b} - A_2\mathbf{x})$.

Investigue a convergência da iteração do ponto fixo aplicada a $G(\mathbf{x})$ nos seguintes casos onde D é a diagonal de A , L e U são as partes triangulares superior e inferior de A de modo que $A = D + L + U$:

a) $A_1 = D$ e $A_2 = L + U$;

b) $A_1 = D + U$ e $A_2 = L$.

Exercício 3. Expresse as iterações de Newton para cada um dos seguintes sistemas de equações não-lineares:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 = 9, \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 = 4. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1^2 + x_2 - 2x_1x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 = -1. \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x_1^3 - x_2^2 = 0, \\ x_1 + x_1^2x_2 = 2. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} 2 \sin(x_1) + \cos(x_2) - 5x_1 = 0, \\ 4 \cos(x_1) + 2 \sin(x_2) - 5x_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Exercício 4. Efetue uma iteração do método de Newton aplicado ao sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1x_2 = 1. \end{cases}$$

com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1]^T$.

Definição 1. Considere uma sequência $\{\mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que

a) $\mathbf{x}_k \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ q -quadráticamente se $\mathbf{x}_k \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ e existe $K > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| \leq K \|\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\xi}\|^2. \quad (4)$$

b) $\mathbf{x}_k \rightarrow \xi$ q -superlinearmente com q -ordem $\alpha > 1$ se $\mathbf{x}_k \rightarrow \xi$ e existe $K > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| \leq K \|\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\xi}\|^\alpha. \quad (5)$$

Observação. A definição acima difere da convergência quadrática e superlinear apresentadas no livro texto. Em que sentido essas definições de convergência são diferentes?

Lema 2 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja F diferenciável num conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e seja $\xi \in \Omega$. Então, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ suficientemente próximo de ξ , tem-se*

$$F(\mathbf{x}) - F(\xi) = \int_0^1 J_F(\xi + t(\mathbf{x} - \xi))(\mathbf{x} - \xi) dt, \quad (6)$$

onde J_F denota o Jacobiano de F .

Definição 3 (Continuidade de Lipschitz). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. A função G é dita Lipschitz contínua em Ω com constante γ se*

$$\|G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{y})\| \leq \gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad (7)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Lema 4. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável num conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Suponha que existe $\xi \in \Omega$ tal que $F(\xi) = \mathbf{0}$ e $J_F(\xi)$ é não-singular. Suponha também que $J_F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma função Lipschitz contínua com constante γ . Então, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|J_F(\mathbf{x})\| \leq 2\|J_F(\xi)\|, \quad (8)$$

$$\|J_F(\mathbf{x})^{-1}\| \leq 2\|J_F(\xi)^{-1}\|, \quad (9)$$

e

$$\|J_F(\xi)\|^{-1} \frac{\|\mathbf{x} - \xi\|}{2} \leq \|F(\mathbf{x})\| \leq 2\|J_F(\xi)\| \|\mathbf{x} - \xi\|. \quad (10)$$

Exercício 5 (Convergência do Método de Newton com Hipótese de Lipschitz Contínua). *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável num conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Suponha que existe $\xi \in \Omega$ tal que $F(\xi) = \mathbf{0}$ e $J_F(\xi)$ é não-singular. Suponha também que $J_F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma função Lipschitz contínua com constante γ . Mostre que existe $\delta > 0$ tal que, se $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}(\xi, \delta) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \xi\| < \delta\}$, então a iteração de Newton*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J_F(\mathbf{x}_k)^{-1} F(\mathbf{x}_k), \quad (11)$$

converge q-quadraticamente para ξ .

Definição 5 (Continuidade de Hölder). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. A função G é dita Hölder contínua em Ω com expoente α se*

$$\|G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{y})\| \leq K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha, \quad (12)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Exercício 6 (Convergência do Método de Newton com Hipótese de Hölder Contínua). *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável num conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Suponha que existe $\xi \in \Omega$ tal que $F(\xi) = \mathbf{0}$ e $J_F(\xi)$ é não-singular. Suponha também que $J_F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma função Hölder contínua com expoente α . Mostre que existe $\delta > 0$ tais que, se $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}(\xi, \delta) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \xi\| < \delta\}$, então a iteração de Newton*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J_F(\mathbf{x}_k)^{-1} F(\mathbf{x}_k), \quad (13)$$

converge q-superlinearmente com q-ordem $\alpha + 1$ para ξ .

Exercício 7. O desempenho do método de Newton pode ser melhorado fazendo uma mudança de variável? Em outras palavras, o método de Newton aplicado para determinar a raiz dos sistemas $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ e $AF(B\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, para matrizes não-singulares $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, apresentam alguma diferença no desempenho partindo da mesma aproximação inicial $\mathbf{x}_0$? Justifique sua resposta.

Exercício 8. Modifique o método de Newton de modo que ele possa ser usado para determinar a inversa de uma matriz não-singular $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ considerando a função $F : \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ definida como segue:

$$F(X) = I - AX.$$

Observe que a inversa A^{-1} deve ser aproximada por $X^{(k)}$ na iteração de Newton. Mostre que, ainda assim, tem-se convergência quadrática pois o resíduo $R^{(k)} = I - AX^{(k)}$ e o erro $E^{(k)} = A^{-1} - X^{(k)}$ satisfazem as equações

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} \quad \text{e} \quad E^{(k+1)} = E^{(k)} A E^{(k)}.$$

Exercício 9. O método de Newton pode ser usado para determinar o autovalor λ associado à um autovetor $\mathbf{x}$ de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Precisamente, defina $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ como segue:

$$F(\lambda, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que a raiz de F é exatamente um auto-par de A . Determine a matriz Jacobiana de F estabeleça a iteração de Newton desse sistema de equações não-lineares.