

Lista 10 - Auto-valores e Auto-vetores

Exercício 1. Determine os auto-valores, o determinante e os valores singulares de um refletor de Householder.

Exercício 2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que se $a + ib$ é um auto-valor de A associado ao auto-vetor $u + iv$, então $a - ib$ é um auto-valor de A associado ao auto-vetor $u - iv$.

Exercício 3. Mostre que os auto-valores de uma matriz hermitiana são todos reais.

Exercício 4. Mostre que os auto-valores de uma matriz definida positiva são todos positivos.

Exercício 5. Mostre que, para qualquer norma induzida de matriz, $\rho(A) \leq \|A\|$, onde $\rho(A)$ denota o raio espectral de A .

Exercício 6. Um polinômio em uma matriz A é uma expressão da forma $p(A) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_m A^m$. Mostre que, se λ e x representam um auto-valor e um auto-vetor associado da matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_m \lambda^m$ é um auto-valor de $p(A)$ associado ao auto-vetor x .

Exercício 7. Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com pelo menos uma delas não-singular. Mostre que AB e BA possuem os mesmos auto-valores.

Exercício 8. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Usando a decomposição de Schur, mostre que existe uma matriz ortogonal Q tal que $Q^T A Q = D$ é uma matriz diagonal. O que pode ser dito sobre a decomposição SVD de A .

Exercício 9. Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é dita *normal* se $A^* A = A A^*$. Mostre que, se $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é normal e triangular superior, então T é diagonal. Mostre também que toda matriz normal é diagonalizável, i.e., A pode ser escrita como $A = V \Lambda V^{-1}$ onde Λ é uma matriz diagonal.

Exercício 10. Suponha que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ possua auto-valores distintos. Mostre que, se $Q^* A Q = T$ é a decomposição de Schur de A e $AB = BA$, então $Q^* B Q$ é triangular superior.

Exercício 11. Dada uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, use a decomposição de Schur para mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma matriz diagonalizável B tal que $\|A - B\|_2 \leq \epsilon$. Portanto, o conjunto das matrizes diagonalizáveis é denso em $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Exercício 12. Mostre que o traço de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é a soma de seus auto-valores.