

Lista 1 - Resolução de Equações Não-Lineares

Exercício 1. Mostre analiticamente que a equação $xe^{-x} = \gamma$ tem exatamente duas raízes reais se $\gamma < e^{-1}$.

Exercício 2. Considere a equação não-linear

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

- a) Determine a iteração x_1 obtida pelo método de Newton partindo de $x_0 = 1$;
- b) Determine a iteração x_2 obtida pelo método da secante partindo de $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Exercício 3. Escreva as iterações do método de Newton para cada uma das seguintes equações não-lineares:

- a) $x^3 - 2x - 5 = 0$;
- b) $e^{-x} = x$;
- c) $x \sin(x) = 1$;

Exercício 4. Responda as seguintes questões sobre um método que pode ser usado para resolver uma equação não-linear $f(x) = 0$ com raiz $\xi \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta.

- a) O que pode ser dito sobre a convergência do método se o erro da k -ésima iteração $e_k = |x_k - \xi|$ é dado pela sequência $\{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots\}$?
- b) O que pode ser dito sobre a convergência do método se o erro da k -ésima iteração $e_k = |x_k - \xi|$ é dado pela sequência $\{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \dots\}$?
- c) O que pode ser dito sobre a convergência do se este ganha um dígito a mais de precisão a cada iteração?
- d) Se o valor absoluto $|f(x_k)|$ é pequeno, podemos afirmar que x_k está próximo da raiz ξ .

Exercício 5. Suponha que o método da secante é usado para encontrar a raiz ξ de uma equação não-linear $f(x) = 0$. Mostre que, se numa iteração ocorre um dos seguintes casos: $x_k = \xi$ ou $x_{k-1} = \xi$, então tem-se $x_{k+1} = \xi$.

Exercício 6. O método de Newton, aplicado para resolver uma equação não-linear $f(x) = 0$, requer o cálculo da derivada $f'(x)$ a cada iteração. Suponha que o valor correto da derivada seja substituído por uma constante $d \neq 0$, produzindo o esquema

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{d}.$$

Sobre quais condições sobre d esse método terá convergência local? Nesse caso, qual será a taxa de convergência? Há algum valor de d que resulta em convergência quadrática?

Exercício 7. No método da bissecção, a escolha da média aritmética $c_k = (a_k + b_k)/2$ como novo extremo do intervalo minimiza o erro absoluto do pior caso. Mostre que, se $a_k b_k > 0$, então a escolha da média geométrica $m_k = \sqrt{a_k b_k}$ como novo extremo do intervalo minimiza o erro relativo do pior caso.

Exercício 8. Investigue se e para quais valores a iteração $x_{k+1} = 2^{x_k-1}$ converge considerando diferentes escolhas de x_0 .

Exercício 9. Considere a função $g(x) = x + (x - 1)^2$. Mostre que $\xi = 1$ é um ponto fixo de g e que $g'(\xi) = 1$. Mostre também que a iteração do ponto fixo $x_{k+1} = g(x_k)$ converge se $x_0 < 1$.

Exercício 10. Investigue graficamente o comportamento da sequência $x_{k+1} = 1 - \lambda x_k^2$ para $\lambda = 0.7$, $\lambda = 0.9$ e $\lambda = 2$. No último caso, a sequência tem um comportamento caótico.

Definição 1 (Método Regula Falsi). *Seja f uma função contínua. Suponha que $a_0 < b_0$ são tais que $f(a_0)f(b_0) < 0$ e, portanto, existe $\xi \in (a_0, b_0)$ tal que $f(\xi) = 0$. O método regula falsi, encontrado em textos indianos do século V e estudado pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci, define uma sequência de intervalos (a_k, b_k) , que contém a raiz ξ , da seguinte forma:*

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k, x_k), & \text{se } f(x_k)f(b_k) > 0, \\ (x_k, a_k), & \text{se } f(x_k)f(b_k) < 0, \end{cases}$$

onde x_k é dado pela seguinte equação:

$$x_k = a_k - f(a_k) \frac{a_k - b_k}{f(x_k) - f(b_k)}.$$

Exercício 11. Interprete geomometricamente o método Regula Falsi.

Exercício 12. Suponha que f possui segunda derivada contínua em $[a, b]$ e $f''(\xi) \neq 0$. Por simplicidade, suponha também que $f''(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que o método regula falsi tem convergência linear. Verifique que a convergência é lenta se $|f'(\xi)|$ é pequeno, $f(b)$ é grande ou ξ é próximo de b .

Exercício 13 (Metodo de Halley). A iteração x_{k+1} do método de Newton pode ser interpretada geometricamente como a intersecção do eixo horizontal com a reta tangente ao gráfico de f em x_k . De um modo similar, o método de Halley é obtido através da intersecção do eixo horizontal com a hipérbole

$$h(x) = b + \frac{a}{x - c},$$

onde a, b, c são determinados de modo que $h(x)$ seja tangente e tenha a mesma curvatura que $f(x)$ em x_k . Encontre uma expressão para o método de Halley em termos de $x_k, f(x_k), f'(x_k)$ e $f''(x_k)$.

Mostre que o método de Halley aplicado a equação $f(x) = x^2 - c$, para $c > 0$, fornece as equações

$$x_{k+1} = x_k \frac{x_k^2 + 3c}{3x_k + c} = x_k - \frac{2x_k(x_k^2 - c)}{3x_k + c}.$$

Exercício 14 (Exercício Computacional). Determine a raiz real da equação

$$e^x(x - 1) = e^{-x}(x + 1),$$

construindo o gráfico das funções de cada lado da equação. Depois, calcule a raiz com erro menor que 10^{-8} usando o método da bissecção. Quantas iterações são necessárias?