Exercícios do Livro *Cálculo*, Vol. 1, de J. Stewart, 8a. edição

Resolvidos por Cristian Camilo Espitia Morillo

1 Exercício 34, seção 1.1

Enunciado:

Encontre o domínio da função $g(t) = \sqrt{3-t} - \sqrt{2+t}$.

Resolução:

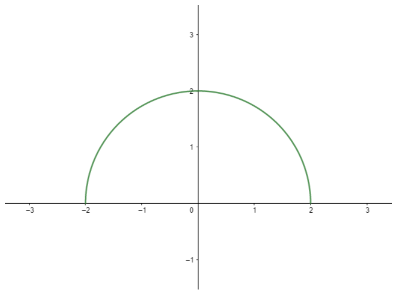
A função $g(t)$ tem valor real quando $3-t \geq 0$ e quando $2+t \geq 0$, assim $t \leq 3$ e $t \geq -2$, daí o domínio de $g(t)$ é $\{\ t \mid -2 \leq t \leq 3\}$.

2 Exercício 38, seção 1.1

Enunciado:

Encontre o domínio e a imagem e esboce o gráfico da função $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Resolução:
A função é $y = \sqrt{4-x^2}$ daí $y^2 = 4 - x^2$ segue-se que $x^2 + y^2 = 4$ a qual é a equação de uma circunferência com centro em $(0,0)$ e radio 2, como y é positivo sempre, então o gráfico é a metade superior. O domínio é $\{x \in \mathbb{R}| -2 \leq x \leq 2\}$, a imagem é $0 \leq y \leq 2$.



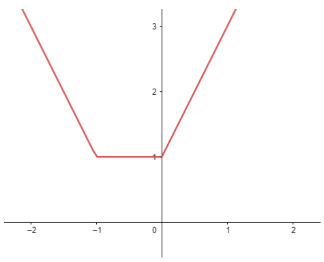
3 Exercício 48, seção 1.1

Enunciado:

Esboce o gráfico da função $h(t) = |t| + |t+1|$.

Resolução:
Note que a função toma 3 valores para diferentes valores de t, assim

$$h(t) = \begin{cases} -t-(t+1) & \text{se } t < -1 \\ -t+(t+1) & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ t+(t+1) & \text{se } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2t-1 & \text{se } t < -1 \\ 1 & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ 2t+1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

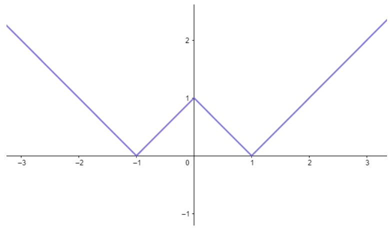


4 Exercício 50, seção 1.1

Enunciado:

Esboce o gráfico da função $g(x) = ||x| - 1|$.

Resolução:
Note que a função toma 4 valores para diferentes valores de x, daí



$$g(x) = \begin{cases} |-x-1| = |x+1| & \text{se } x < 0 \\ |x-1| & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x < -1 \\ x+1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

5 Exercício 18, seção 1.2

Enunciado:

Um administrador de uma fábrica de móveis descobre que custa \$2200 para fabricar 100 cadeiras em um dia e \$4800 para produzir 300 cadeiras em um dia.

(a) Expresse o custo como uma função do número de cadeiras produzidas, supondo que ela seja linear. A seguir esboce o gráfico.

(b) Qual é a inclinação do gráfico e o que ela representa?

(c) Qual a intersecção com o eixo y do gráfico e o que ela representa?

Resolução:

(a) Seja x o número de cadeiras produzidas no dia e y o custo de produção. Usando os pontos $(100, 2200)$ e $(300, 4800)$ temos que $m = \frac{4800-2200}{300-100} = 13$, desta forma $y - 2200 = 13(x - 100) \to y = 13x + 900$. O gráfico esta apresentado na figura 1.

(b) A inclinação no item (a) m representa o custo de produzir uma cadeira adicional.

(c) A intersecção com o eixo y representa o custo fixo de produção diária. A figura tem validade no problema quando $x \geq 0$,

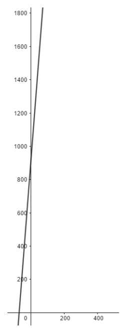


Figure 1: Custo em função do número de cadeiras $y = 13x + 900$.

6 Exercício 18, seção 1.3

Enunciado:

Faça o gráfico de cada função sem marcar pontos, mas começando com o gráfico de uma das funções básicas dadas na seção 1,2 e então aplicando as transformações apropriadas.

$$y = 3 - 2\cos x$$

Resolução:

Começando com o gráfico de $y = \cos x$ alongamos verticalmente por um fator de 2, refletimos com respeito ao eixo x e deslocamos o gráfico 3 unidades para acima, assim obtemos o gráfico da figura 5.

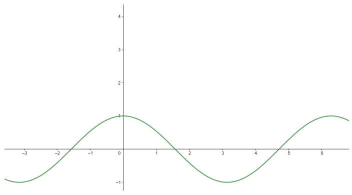


Figure 2: $y = \cos x$

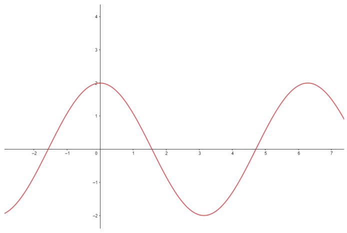


Figure 3: $y = 2\cos x$

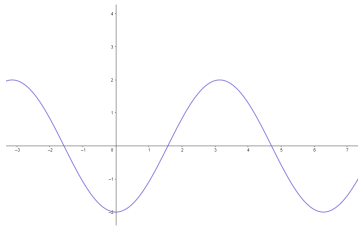


Figure 4: $y = -2\cos x$

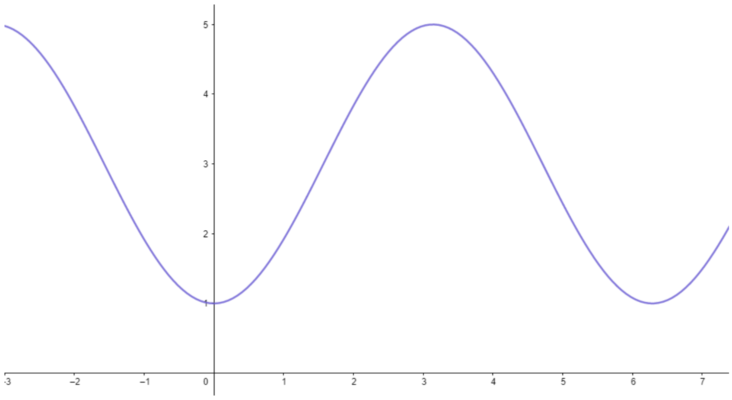


Figure 5: $y = 3 - 2\cos x$

7 Exercício 30, seção 1.4

Enunciado:

Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra seu tamanho cada meia hora

a) Quantas bactérias existem após 3 horas?

b) Quantas bactérias existem após t horas?

c) Quantas bactérias existem após 40 minutos?

d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 100000 bactérias.

Resolução:

a) Após 30 minutos tem 1000 bactérias, após 1 hora tem 2000 bactérias, após 1 hora e 30 minutos tem 4000 bactérias, após 2 horas tem 8000 bactérias, após 2 horas e 30 minutos tem 16000 bactérias e após 3 horas tem 32000 bactérias.

b) Se $P(t)$ representa a função população em função do tempo t em horas, então $P(t) = 2^{2t}(500)$

c) 40 minutos são 2/3 de uma hora, assim $P(2/3) = 2^{4/3}500 \approx 1259.921$

d) O gráfico que representa o crescimento de bactérias é apresentado na figura 6, neste gráfico o domínio é apenas $t \geq 0$. Para conhecer analiticamente o tempo necessário para atingir 100000 bactérias, fazemos $100000 = 2^t(500)$ daí multiplicando por $1/500$ temos $100000/500 = 2^{2t}$, aplicando a inversa, temos:

$$t = \frac{\log_2(200)}{2} = \frac{1}{2}\frac{\ln 200}{\ln 2} \approx 3.8219$$

Assim para ter 100000 bactérias é preciso aproximadamente 3.8 horas.

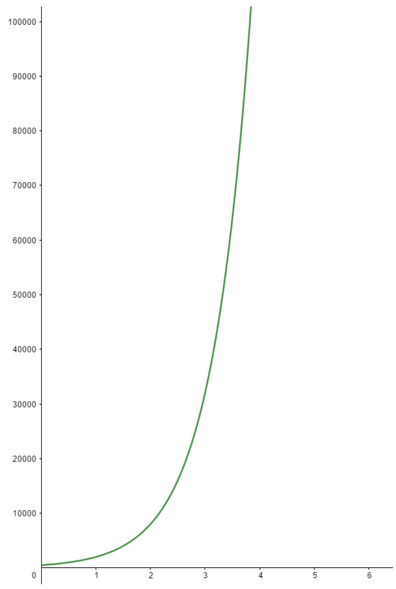


Figure 6: $P(t) = 2^{2t}(500)$.

8 Exercício 24, seção 1.5

Enunciado:

Encontre uma fórmula para a função inversa de

$$y = \frac{e^x}{1+2e^x}$$

Resolução:

Note que a função inicial é injetora pois é composição de uma função injetora com a função exponencial natural, assim é possível calcular a inversa como

$$y = \frac{e^x}{1+2e^x} \to (1+2e^x)y = e^x \to y + 2ye^x = e^x \to e^x(1-2y) = y \to x = \ln\left(\frac{y}{1-2y}\right)$$

Daí a inversa é

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$

9 Exercício 32, seção 1.5

Enunciado:

Seja $g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

a) Encontre g^{-1}. Como esta relacionada a g?

b) Faça um gráfico de g. Como você explica a sua resposta para a parte (a)?

Resolução:

a) $y = \sqrt[3]{1-x^3} \to y^3 = 1 - x^3 \to x^3 = 1 - y^3 \to x = \sqrt[3]{1-y^3}$, daí $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

A inversa da função $g(x)$ é a mesma função $g(x)$, isto é $g(x) = g^{-1}(x)$.

b) Uma explicação para o item a), pode ser que a curva tem a reta $y = x$ como eixo de simetria. O gráfico é apresentado na figura 7.

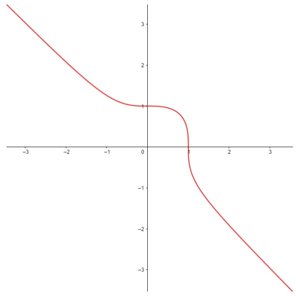


Figure 7: $g(x) = \sqrt[3]{1-x^3} = g^{-1}(x)$

10 Exercício 48, seção 1.5

Enunciado:

Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use apenas os gráficos dados nas figuras 12 e 13 e se é necessário use as transformações da seção 1.3.

(a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

Resolução:
Conhecido o gráfico da função $y = \ln x$ apresentado na figura 8.

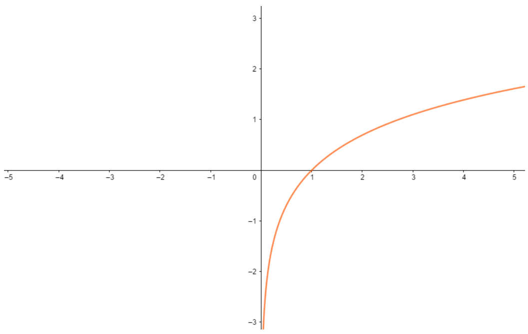


Figure 8: $y = \ln(x)$

Temos que os gráficos das funções $y = \ln(-x)$ e $y = \ln|x|$ são apresentados nas figuras 9 e 10 respectivamente. O gráfico de $y = \ln(-x)$ é refletir o gráfico de $y = \ln x$ com respeito ao eixo y, considerando apenas uma curva. O gráfico de $y = \ln|x|$ é de uma função par, porém simétrica com respeito ao eixo y.

(a)

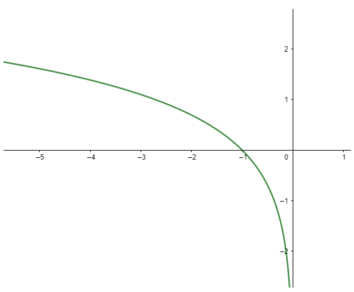


Figure 9: $y = \ln(-x)$

(b)

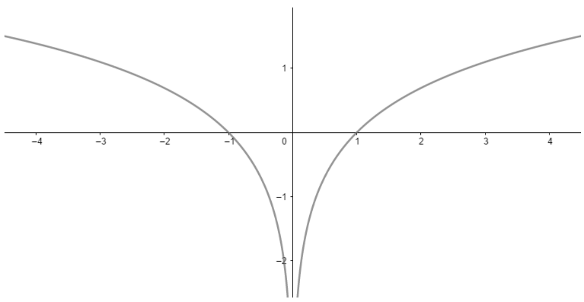


Figure 10: $y = \ln|x|$