

Cursinho Popular Zilda Arns - Tutoria de Exatas



Lista de Exercícios 17 - L17

Análise Combinatória e Probabilidade

Tutor: Tomás S. R. Silva

E-mail: tomassrsilva@gmail.com

Website: www.lasca.ic.unicamp.br/~tomas

19 de outubro de 2020

Resumo

O objetivo dessa lista é introduzir uma grande miscelânea de exercícios acerca de contagem e probabilidade.

Frase da semana

“Conselho é o que pedimos quando já sabemos a resposta, mas gostaríamos de não saber” – Erica Jong

Instruções

1. Procure resolver a lista sem ajuda externa (i.e., calculadora, gabaritos online, etc). O objetivo dessa lista é criar familiaridade com o contexto geral das provas de vestibular, que não envolvem ajudas externas.
2. Procure resolver as questões da forma mais metodológica possível. Defina:
 - (a) Qual a incógnita do problema? Reconheça de forma clara o que está sendo perguntado.
 - (b) Quais conhecimentos você tem que podem ajudar a desvendar a incógnita? Pense sobre a carga teórica que pode te ajudar a resolver a questão.
 - (c) Como manipular os dados do problema dentro da teoria para desvendar a incógnita? Analise os dados fornecidos e pense em como aplicá-los dentro da teoria a ser utilizada para resolver o problema.

Apesar de parecer extenso, o método visa lhe fornecer agilidade e formalismo para a resolução de questões.

3. Classifique as questões de acordo com a dificuldade aparente: (F) para *FÁCIL*; (M) para *MÉDIO*; e (D) para *DIFÍCIL*. Aprender a classificar questões é uma habilidade importante, que pode lhe conferir agilidade na resolução de provas de vestibular. Resolva primeiramente as questões fáceis para ganhar tempo, e evolua a dificuldade conforme avança.
4. As questões mais difíceis (i.e., do tipo (D)) devem ser revisadas e repassadas, preferencialmente durante o horário da tutoria.
5. Não é necessário cronometrar o tempo de resolução da lista. Mas deve-se ter em mente uma estimativa do tempo que levou para resolvê-la :)
6. *Carpe Diem*. Matemática pode ser legal!

1 Questão

(UNICAMP)

5. Dois tipos de exames para a detecção de certo vírus foram aplicados em um grupo de 80 pacientes, dos quais, com certeza, 60 são portadores desse vírus e 20 não são. Os resultados dos exames estão organizados nas tabelas abaixo.

EXAME 1	PORTADOR	NÃO PORTADOR	TOTAL
RESULTADO POSITIVO	42	06	48
RESULTADO NEGATIVO	18	14	32

EXAME 2	PORTADOR	NÃO PORTADOR	TOTAL
RESULTADO POSITIVO	56	07	63
RESULTADO NEGATIVO	04	13	17

Note que em cada exame ocorrem tanto **falsos positivos** (pacientes não portadores do vírus com resultado positivo no exame) quanto **falsos negativos** (pacientes portadores do vírus com resultado negativo no exame).

- Calcule a porcentagem de pacientes portadores do vírus no grupo em estudo.
- Considerando os resultados positivos em cada exame, qual dos dois exames tem a menor porcentagem de **falsos positivos**? Justifique sua resposta.

2 Questão

(UNICAMP)

Pedro precisa comprar x borrachas, y lápis e z canetas. Após fazer um levantamento em duas papelarias, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R\$ 23,00 pelo conjunto de borrachas, lápis e canetas, enquanto a papelaria B cobra R\$ 25,00 pelo mesmo material. Em seu levantamento, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R\$ 1,00 pela borracha, R\$ 2,00 pelo lápis e R\$ 3,00 pela caneta e que a papelaria B cobra R\$ 1,00 pela borracha, R\$ 1,00 pelo lápis e R\$ 4,00 pela caneta.

- a) Forneça o número de lápis e de borrachas que Pedro precisa comprar em função do número de canetas que ele pretende adquirir.
- b) Levando em conta que $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$, e que essas três variáveis são inteiras, determine todas as possíveis quantidades de lápis, borrachas e canetas que Pedro deseja comprar.

3 Questão

(UNICAMP)

8. A figura abaixo representa um dado na forma de um tetraedro regular com os vértices numerados de 1 a 4. Em um lançamento desse dado, deve ser observado o número estampado no vértice superior.



- Considere a soma dos números obtidos em dois lançamentos de um dado tetraédrico. Determine de quantas maneiras essa soma pode resultar em um número primo.
- Seja p_n a probabilidade de se observar o número n no lançamento de um dado tetraédrico tendencioso para o qual $p_1 = 2p_2 = 3p_3 = 4p_4$. Calcule essas quatro probabilidades.

4 Questão

(UNICAMP)

Seja C o conjunto dos números (no sistema decimal) formados usando-se apenas o algarismo 1, ou seja $C = \{ 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \dots \}$.

- a) Verifique se o conjunto C contém números que são divisíveis por 9 e se contém números divisíveis por 6. Exiba o menor número divisível por 9, se houver. Repita o procedimento em relação ao 6.
- b) Escolhendo ao acaso um número m de C , e sabendo que esse número tem, no máximo, 1000 algarismos, qual a probabilidade de m ser divisível por 9?

5 Questão

(UNICAMP)

Uma loteria sorteia três números distintos entre doze números possíveis.

- a) Para uma aposta em três números, qual é a probabilidade de acerto?
- b) Se a aposta em três números custa R\$ 2,00, quanto deveria custar uma aposta em cinco números?

6 Questão

(UNICAMP)

O perfil lipídico é um exame médico que avalia a dosagem dos quatro tipos principais de gorduras (lipídios) no sangue: colesterol total (CT), colesterol HDL (conhecido como “bom colesterol”), colesterol LDL (o “mau colesterol”) e triglicérides (TG). Os valores desses quatro indicadores estão relacionados pela fórmula de Friedewald: $CT = LDL + HDL + TG/5$. A tabela abaixo mostra os valores normais dos lipídios sanguíneos para um adulto, segundo o laboratório SangueBom.

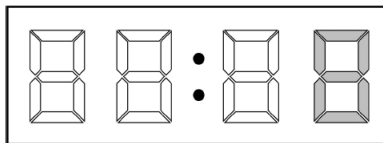
Indicador	Valores normais
CT	Até 200 mg/dl
LDL	Até 130 mg/dl
HDL	Entre 40 e 60 mg/dl
TG	Até 150 mg/dl

- a) O perfil lipídico de Pedro revelou que sua dosagem de colesterol total era igual a 198 mg/dl, e que a de triglicérides era igual a 130 mg/ml. Sabendo que todos os seus indicadores estavam normais, qual o intervalo possível para o seu nível de LDL?
- b) Acidentalmente, o laboratório SangueBom deixou de etiquetar as amostras de sangue de cinco pessoas. Determine de quantos modos diferentes seria possível relacionar essas amostras às pessoas, sem qualquer informação adicional. Na tentativa de evitar que todos os exames fossem refeitos, o laboratório analisou o tipo sanguíneo das amostras, e detectou que três delas eram de sangue O+ e as duas restantes eram de sangue A+. Nesse caso, supondo que cada pessoa indicasse seu tipo sanguíneo, de quantas maneiras diferentes seria possível relacionar as amostras de sangue às pessoas?

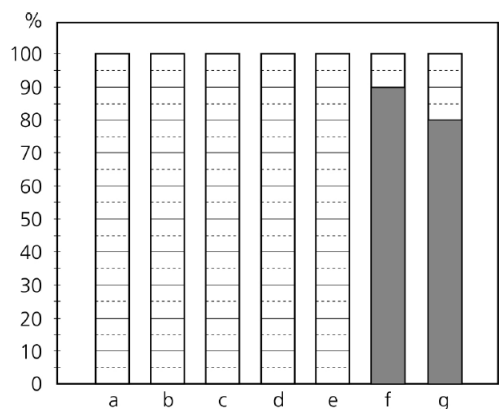
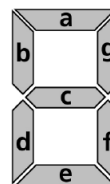
7 Questão

(UNICAMP)

O mostrador de determinado relógio digital indica horas e minutos, como ilustra a figura ao lado, na qual o dígito da unidade dos minutos está destacado. O dígito em destaque pode representar qualquer um dos dez algarismos, bastando para isso que se ative ou desative as sete partes que o compõem, como se mostra abaixo.



a) Atribuindo as letras a, b, c, d, e, f, g aos trechos do dígito destacado do relógio, como se indica ao lado, pinte no gráfico de barras abaixo a porcentagem de tempo em que cada um dos trechos fica aceso. Observe que as porcentagens referentes aos trechos f e g já estão pintadas.



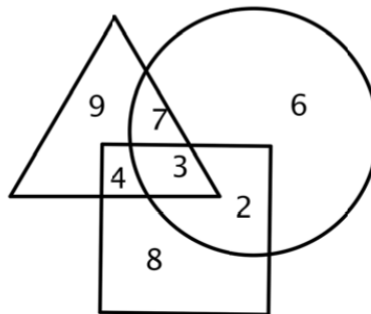
b) Supondo, agora, que o dígito em destaque possua dois trechos defeituosos, que não acendem, calcule a probabilidade do algarismo 3 ser representado corretamente.

8 Questão

(UNICAMP)

O diagrama abaixo indica a distribuição dos alunos matriculados em três cursos de uma escola. O valor da mensalidade de cada curso é de R\$ 600,00, mas a escola oferece descontos aos alunos que fazem mais de um curso. Os descontos, aplicados sobre o valor total da mensalidade, são de 20% para quem faz dois cursos e de 30% para os matriculados em três cursos.

- a) Por estratégia de *marketing*, suponha que a escola decida divulgar os percentuais de desconto, calculados sobre a mensalidade dos cursos adicionais e não sobre o total da mensalidade. Calcule o percentual de desconto que incide sobre a mensalidade do segundo curso para aqueles que fazem dois cursos e o percentual de desconto sobre o terceiro curso para aqueles que fazem três cursos.
- b) Com base nas informações do diagrama, encontre o número de alunos matriculados em pelo menos dois cursos. Qual a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estar matriculado em apenas um curso?



9 Questão

(UNICAMP)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, cujos coeficientes são números reais.

- a) Suponha que exatamente seis elementos dessa matriz são iguais a zero. Supondo também que não há nenhuma informação adicional sobre A , calcule a probabilidade de que o determinante dessa matriz não seja nulo.
- b) Suponha, agora, que $a_{ij} = 0$ para todo elemento em que $j > i$, e que $a_{ij} = i - j + 1$ para os elementos em que $j \leq i$. Determine a matriz A , nesse caso, e calcule sua inversa, A^{-1} .

10 Questão

(UNICAMP)

Um casal convidou seis amigos para assistirem a uma peça teatral. Chegando ao teatro, descobriram que, em cada fila da sala, as poltronas eram numeradas em ordem crescente. Assim, por exemplo, a poltrona 1 de uma fila era sucedida pela poltrona 2 da mesma fila, que, por sua vez, era sucedida pela poltrona 3, e assim por diante.

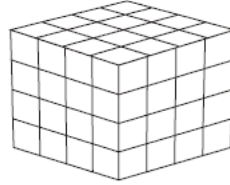
- a) Suponha que as oito pessoas receberam ingressos com numeração consecutiva de uma mesma fila e que os ingressos foram distribuídos entre elas de forma aleatória. Qual a probabilidade de o casal ter recebido ingressos de poltronas vizinhas?
- b) Suponha que a primeira fila do teatro tenha 8 cadeiras, a segunda fila tenha 2 cadeiras a mais que a primeira, a terceira fila tenha 2 cadeiras a mais que a segunda e assim sucessivamente até a última fila. Determine o número de cadeiras da sala em função de n , o número de filas que a sala contém. Em seguida, considerando que a sala tem 144 cadeiras, calcule o valor de n .

11 Questão

(USP)

A partir de 64 cubos brancos, todos iguais, forma-se um novo cubo. A seguir, este novo cubo tem cinco de suas seis faces pintadas de vermelho. O número de cubos menores que tiveram pelo menos duas de suas faces pintadas de vermelho é

- a) 24
- b) 26
- c) 28
- d) 30
- e) 32



12 Questão

(USP)

Um apreciador deseja adquirir, para sua adega, 10 garrafas de vinho de um lote constituído por 4 garrafas da Espanha, 5 garrafas da Itália e 6 garrafas da França, todas de diferentes marcas.

- a) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas desse lote?
- b) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas do lote, sendo 2 garrafas da Espanha, 4 da Itália e 4 da França?
- c) Qual é a probabilidade de que, escolhidas ao acaso, 10 garrafas do lote, haja exatamente 4 garrafas da Itália e, pelo menos, uma garrafa de cada um dos outros dois países?

13 Questão

(USP)

- a) Dez meninas e seis meninos participarão de um torneio de tênis infantil. De quantas maneiras distintas essas 16 crianças podem ser separadas nos grupos A , B , C e D , cada um deles com 4 jogadores, sabendo que os grupos A e C serão formados apenas por meninas e o grupo B , apenas por meninos?
- b) Acontecida a fase inicial do torneio, a fase semifinal terá os jogos entre Maria e João e entre Marta e José. Os vencedores de cada um dos jogos farão a final. Dado que a probabilidade de um menino ganhar de uma menina é $3/5$, calcule a probabilidade de uma menina vencer o torneio.

14 Questão

(USP)

Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente essas 14 questões.

- a) Quantas versões distintas da prova poderão ser produzidas?
- b) A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as 7 primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Quantas versões classe A distintas da prova poderão ser produzidas?
- c) Dado que um candidato vai receber uma prova que começa com 7 questões de Português, qual é a probabilidade de que ele receba uma versão classe A?

15 Questão

(USP)

Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é

- (A) 200.
- (B) 204.
- (C) 208.
- (D) 212.
- (E) 220.

16 Questão

(USP)

Em uma competição de vôlei, estão inscritos 5 times. Pelo regulamento, todos os times devem se enfrentar apenas uma vez e, ao final da competição, eles serão classificados pelo número de vitórias. Dois ou mais times com o mesmo número de vitórias terão a mesma classificação. Em cada jogo, os times têm probabilidade $\frac{1}{2}$ de vencer.

- a) Explique por que 2 times não podem empatar na classificação com 4 vitórias cada um.
- b) Qual é a probabilidade de que o primeiro classificado termine a competição com 4 vitórias?
- c) Qual é a probabilidade de que os 5 times terminem empatados na classificação?

17 Questão

(USP)

Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine

- a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.
- b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor.

18 Questão

(USP)

Em um jogo entre Pedro e José, cada um deles lança, em cada rodada, um mesmo dado honesto uma única vez. O dado é cúbico, e cada uma de suas 6 faces estampa um único algarismo de maneira que todos os algarismos de 1 a 6 estejam representados nas faces do dado.

Um participante vence, em uma certa rodada, se a diferença entre seus pontos e os pontos de seu adversário for, no mínimo, de duas unidades. Se nenhum dos participantes vencer, passa-se a uma nova rodada.

Dessa forma, determine a probabilidade de

- a) Pedro vencer na primeira rodada.
- b) nenhum dos dois participantes vencer na primeira rodada.
- c) um dos participantes vencer até a quarta rodada.

19 Questão

(USP)

Em um torneio de xadrez, há $2n$ participantes.

- a) Na primeira rodada, há n jogos. Calcule, em função de n , o número de possibilidades para se fazer o empareiramento da primeira rodada, sem levar em conta a cor das peças.
- b) Suponha que 12 jogadores participem do torneio, dos quais 6 sejam homens e 6 sejam mulheres. Qual é a probabilidade de que, na primeira rodada, só haja confrontos entre jogadores do mesmo sexo?

20 Questão

(USP)

Um recipiente hermeticamente fechado e opaco contém bolas azuis e bolas brancas. As bolas de mesma cor são idênticas entre si e há pelo menos uma de cada cor no recipiente. Na tentativa de descobrir quantas bolas de cada cor estão no recipiente, usou-se uma balança de dois pratos. Verificou-se que o recipiente com as bolas pode ser equilibrado por:

- i) 16 bolas brancas idênticas às que estão no recipiente ou
- ii) 10 bolas brancas e 5 bolas azuis igualmente idênticas às que estão no recipiente ou
- iii) 4 recipientes vazios também idênticos ao que contém as bolas.

Seja P_A , P_B e P_R , respectivamente, os pesos de uma bola azul, de uma bola branca e do recipiente na mesma unidade de medida, determine

a) os quocientes $\frac{P_A}{P_B}$ e $\frac{P_R}{P_B}$;

b) o número n_A de bolas azuis e o número n_B de bolas brancas no recipiente.

21 Questão

(ITA)

Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

22 Questão

(ITA)

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

23 Questão

(ITA)

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

A () $\frac{7}{8}$.

B () $\frac{5}{7}$.

C () $\frac{5}{8}$.

D () $\frac{3}{5}$.

E () $\frac{3}{7}$.

24 Questão

(ITA)

Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

25 Questão

(ITA)

Um certo exame de inglês é utilizado para classificar a proficiência de estrangeiros nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% são bem avaliados neste exame. Entre os não proficientes em inglês, 7% são eventualmente bem avaliados. Considere uma amostra de estrangeiros em que 18% são proficientes em inglês. Um estrangeiro, escolhido desta amostra ao acaso, realizou o exame sendo classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

A () 73%. B () 70%. C () 68%. D () 65%. E () 64%.

26 Questão

(IME)

De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

A) $\binom{n+2}{2}$

B) $\binom{n}{3}$

C) $\frac{n!}{3!}$

D) $(n-3)!$

E) 3^n

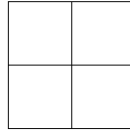
27 Questão

(IME)

Uma pessoa lança um dado n vezes. Determine, em função de n , a probabilidade de que a sequência de resultados obtidos pelos lançamentos dos dados se inicie por 4 e que, em todos eles, a partir do segundo, o resultado seja maior ou igual ao lançamento anterior.

28 Questão

(IME)



Cada um dos quatro quadrados menores da figura acima é pintado aleatoriamente de verde, azul, amarelo ou vermelho. Qual é a probabilidade de que ao menos dois quadrados, que possuam um lado em comum, sejam pintados da mesma cor?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{7}{16}$

D) $\frac{23}{32}$

E) $\frac{43}{64}$

29 Questão

(IME)

Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

30 Questão

(IME)

Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.