Cursinho Popular Zilda Arns - Tutoria de Exatas

Lista de Exercícios 15 - L15

Geometria Espacial

Tutor: Tomás S. R. Silva

E-mail: tomassrsilva@gmail.com
Website: www.lasca.ic.unicamp.br/~tomas

6 de outubro de 2020

Resumo

O objetivo dessa lista é continuar os conceitos geométricos que estão sendo estudados, saindo agora da análise no plano e passando para a análise no espaço.

Frase da semana

"O essencial é invisível aos olhos." – Antoine de Saint-Exupéry

Instruções

1. Procure resolver a lista sem ajuda externa (i.e., calculadora, gabaritos online, etc). O objetivo dessa lista é criar familiaridade com o contexto geral das provas de vestibular, que não envolvem ajudas externas.

2. Procure resolver as questões da forma mais metodológica possível. Defina:

   (a) Qual a incógnita do problema? Reconheça de forma clara o que está sendo perguntado.

   (b) Quais conhecimentos você tem que podem ajudar a desvendar a incógnita? Pense sobre a carga teórica que pode te ajudar a resolver a questão.

   (c) Como manipular os dados do problema dentro da teoria para desvendar a incógnita? Analise os dados fornecidos e pense em como aplicá-los dentro da teoria a ser utilizada para resolver o problema.

   Apesar de parecer extenso, o método visa lhe fornecer agilidade e formalismo para a resolução de questões.

3. Classifique as questões de acordo com a dificuldade aparente: (F) para *FÁCIL*; (M) para *MÉDIO*; e (D) para *DIFÍCIL*. Aprender a classificar questões é uma habilidade importante, que pode lhe conferir agilidade na resolução de provas de vestibular. Resolva primeiramente as questões fáceis para ganhar tempo, e evolua a dificuldade conforme avança.

4. As questões mais difíceis (i.e., do tipo (D)) devem ser revisadas e repassadas, preferencialmente durante o horário da tutoria.

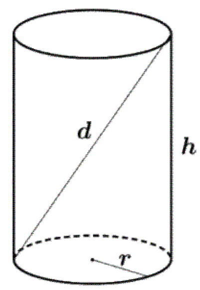
5. Não é necessário cronometrar o tempo de resolução da lista. Mas deve-se ter em mente uma estimativa do tempo que levou para resolvê-la :)

6. *Carpe Diem.* Matemática pode ser legal!

1 Questão

(UNICAMP)

12. Seja um cilindro circular reto com raio da base de comprimento $r = 2$ cm e altura de comprimento h. Seja d a maior distância entre dois pontos desse cilindro, como ilustra a figura abaixo.



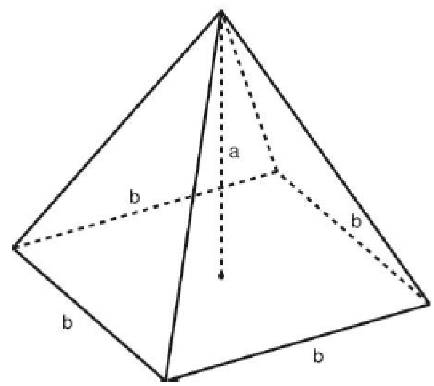
a) Supondo que o cilindro tenha volume igual a um litro, calcule sua área de superfície total.

b) Determine o valor de d no caso em que (r, h, d) seja uma progressão geométrica.

2 Questão

(UNICAMP)

Considere a pirâmide reta de base quadrada, ilustrada na figura abaixo, com lado da base $b = 6\ m$ e altura a.



a) Encontre o valor de a de modo que a área de uma face triangular seja igual a $15\ m^2$.

b) Para $a = 2\ m$, determine o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

3 Questão

(UNICAMP)

A caixa de um produto longa vida é produzida como mostra a sequência de figuras abaixo. A folha de papel da figura 1 é emendada na vertical, resultando no cilindro da figura 2. Em seguida, a caixa toma o formato desejado, e são feitas novas emendas, uma no topo e outra no fundo da caixa, como mostra a figura 3. Finalmente, as abas da caixa são dobradas, gerando o produto final, exibido na figura 4. Para simplificar, consideramos as emendas como linhas, ou seja, desprezamos a superposição do papel.

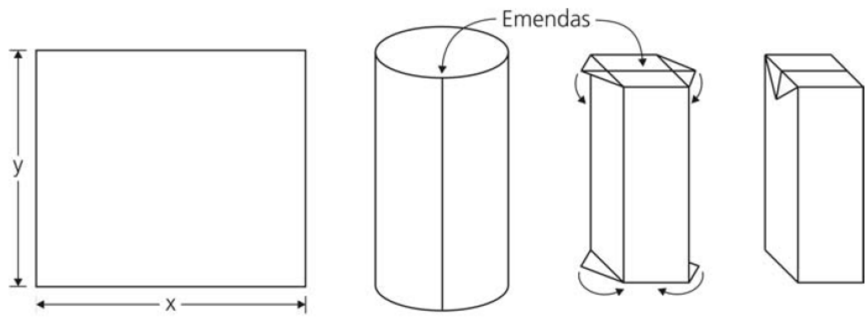


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Se a caixa final tem 20 cm de altura, 7,2 cm de largura e 7 cm de profundidade, determine as dimensões x e y da menor folha que pode ser usada na sua produção.

b) Supondo, agora, que uma caixa tenha seção horizontal quadrada (ou seja, que sua profundidade seja igual a sua largura), escreva a fórmula do volume da caixa final em função das dimensões x e y da folha usada em sua produção.

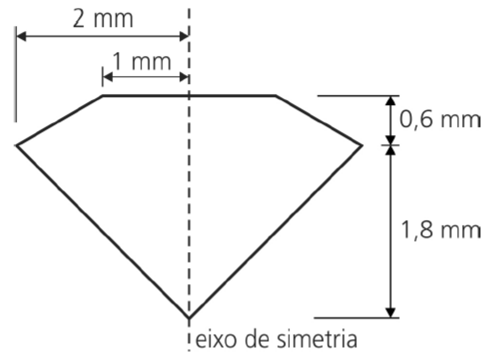
4 Questão

(UNICAMP)

Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.

a) Em gemologia, um quilate é uma medida de massa, que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente 3,5 g/cm^3, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

b) A figura ao lado apresenta a seção transversal de um brilhante. Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.



Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula

$$V = \frac{\pi}{3} h\left(R^2 + Rr + r^2\right),$$

em que R e r são os raios das bases e h é a altura do tronco.

5 Questão

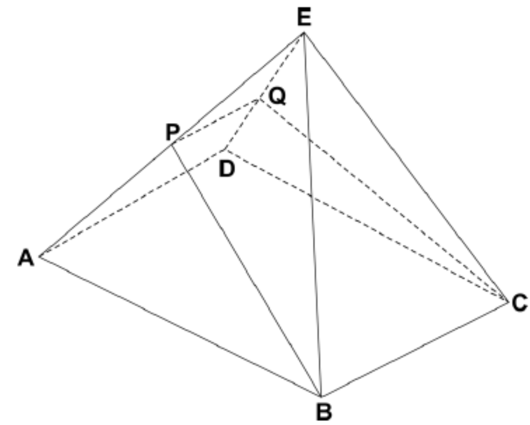
(USP)

A figura representa uma pirâmide *ABCDE*, cuja base é o retângulo *ABCD*. Sabe-se que

$AB = CD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$AD = BC = AE = BE = CE = DE = 1$

$AP = DQ = \dfrac{1}{2}$.



Nessas condições, determine:

a) A medida de $\overline{BP}$.

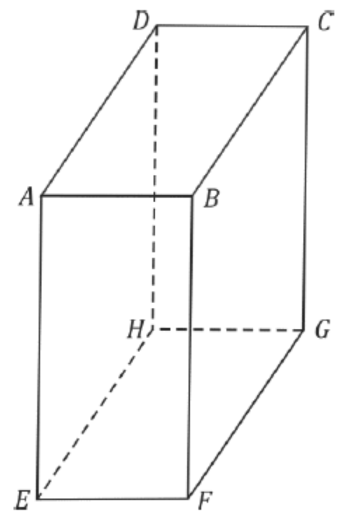
b) A área do trapézio $BCQP$.

c) O volume da pirâmide $BPQCE$.

6 Questão

(USP)

No paralelepípedo reto retângulo $ABCDEFGH$ da figura, tem-se $AB = 2$, $AD = 3$ e $AE = 4$.



a) Qual é a área do triângulo ABD?

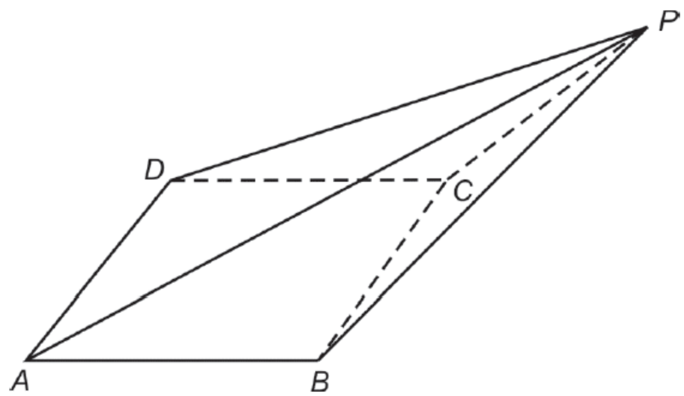
b) Qual é o volume do tetraedro $ABDE$?

c) Qual é a área do triângulo BDE?

d) Sendo Q o ponto do triângulo BDE mais próximo do ponto A, quanto vale AQ?

7 Questão

(USP)



A base do tetraedro $PABCD$ é o quadrado $ABCD$ de lado ℓ, contido no plano α. Sabe-se que a projeção ortogonal do vértice P no plano α está no semiplano de α determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o lado $\overline{AD}$. Além disso, a face BPC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ cuja altura forma, com o plano α, um ângulo θ, em que $0 < \theta < \pi/2$. Sendo $PB = \ell\sqrt{2}/2$, determine, em função de ℓ e θ,

a) o volume do tetraedro $PABCD$;

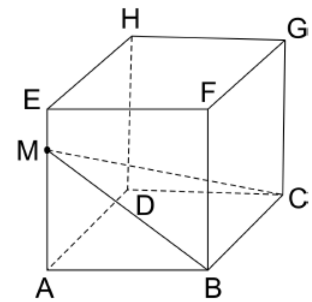
b) a altura do triângulo APB relativa ao lado $\overline{AB}$;

c) a altura do triângulo APD relativa ao lado $\overline{AD}$.

8 Questão

(USP)

O cubo ABCDEFGH possui arestas de comprimento a. O ponto M está na aresta $\overline{AE}$ e $AM = 3 \cdot ME$. Calcule:



a) O volume do tetraedro BCGM.

b) A área do triângulo BCM.

c) A distância do ponto B à reta suporte do segmento $\overline{CM}$.

9 Questão

(ITA)

Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

10 Questão

(ITA)

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de $120°$ e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

A ( ) 4π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

B ( ) 4π e $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

C ( ) 4π e $\pi\sqrt{2}$.

D ( ) 3π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

E ( ) π e $2\pi\sqrt{2}$.