



MA141 - ESTUDO DIRIGIDO
REFERENTE À AULA DE 24/05/2019
Marcelo Terra Cunha



Nesse estudo dirigido temos dois objetivos:

- Introduzir as matrizes de rotação em \mathbb{R}^2 ;
- Fazer uso dessas rotações para entendermos mais sobre cônicas.

Vamos usar a notação onde os vetores de \mathbb{R}^2 são identificados com matrizes coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

O primeiro conceito a ser “relembrado” ou digerido é o de combinação linear. Reflita um pouquinho sobre a expressão

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Em especial, relacione ela com a seguinte frase:

Um vetor arbitrário de \mathbb{R}^2 pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base canônica.

Agora queremos entender o que acontece quando multiplicamos um vetor coluna pela matriz

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

1. Calcule $R(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Calcule $R(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
3. Para uma escolha especial de θ , faça uma figura com esses dois vetores obtidos.
4. Para o caso geral, calcule o ângulo entre eles.
5. Calcule $R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
6. Relacione os itens anteriores com a noção de combinação linear.
7. Agora considere que C é uma curva parametrizada no plano cartesiano. Que objeto corresponderá a $R(\theta)C$?
(Esclarecendo, C ser uma curva parametrizada significa que temos uma parametrização $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde para cada valor de t temos $\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$. Nesse caso, $R(\theta)C$ denota a curva parametrizada por $R(\theta)\gamma$, ou seja, para cada valor de t associamos $R(\theta)\gamma(t) = R(\theta) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$. O exercício pede a interpretação geométrica disso.)

8. Verifique que o polinômio

$$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

pode ser escrito usando matrizes como

$$P(x, y) = [x \ y] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

9. Agora vamos definir um novo vetor $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Verifique (ou justifique) que, com isso

$$[x \ y] = [x' \ y'] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

10. Agora vamos juntar tudo isso para reconhecer que nosso polinômio, $P(x, y)$, pode ser reescrito, em termos das variáveis x' e y' como

$$Q(x', y') = [x' \ y'] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

11. Faça o produto das três matrizes quadradas na expressão acima e verifique que o resultado pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta & \frac{C-A}{2} \sin 2\theta + \frac{B}{2} \cos 2\theta \\ \frac{C-A}{2} \sin 2\theta + \frac{B}{2} \cos 2\theta & A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta \end{bmatrix}.$$

12. O que acontece com a matriz acima se $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$?
13. Para a escolha de θ feita acima, como fica o polinômio escrito nas variáveis x' e y' ?
14. Como podemos usar isso para reconhecer cônicas?
15. Em especial, use a estratégia acima para encontrar as curvas determinadas por $xy = 1$ (claro, você pode concluir a mesma coisa diretamente, mas a ideia é trabalhar com um caso de simples visualização usando a técnica desenvolvida acima).
16. Agora use a técnica acima para $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$.
17. Corra para o Mathematica para por em prática tudo o que fizemos aqui. Note que, em especial, lá você fica livre da situação de só usar rotações por ângulos “notáveis”!