

# Emaranhamento via Exemplos

Marcelo de O. Terra Cunha  
Projeto de Pesquisa para Iniciação Científica  
Probic - Fapemig - 2005

1 de Dezembro de 2004

## 1 Descrição

O *emaranhamento* é um conceito curioso que amadureceu com a *mecânica quântica*. Surgido em 1935[1, 2], durante muito tempo foi relegado a discussões sobre fundamentos de mecânica quântica. Está na alma das chamadas *desigualdades de Bell*[3], que tornam quantitativa a discussão sobre as chamadas *teorias realistas locais*. No último quarto do século XX, com a *teoria quântica da informação* [4], o emaranhamento ganhou o status de recurso a ser compreendido e utilizado. É ele que está por trás de fenômenos interessantes como a *teleportação quântica*[5] e do *algoritmo de Shor*, capaz de fatorar números inteiros em tempo polinomial (em um *computador quântico*).

Mesmo com décadas de história, e com claro interesse em aplicações, o emaranhamento ainda não é completamente entendido[6]. Talvez estejamos ainda puxando o início do fio de uma meada... A proposta desse projeto é envolver o estudante neste assunto de pesquisa através de exemplos simples, a serem trabalhados em detalhe. O primeiro deles é o caso dos *estados puros de dois qubits*. Este exemplo é completamente compreendido, mas já tem uma estrutura rica para ser compreendida por um iniciante. Do ponto de vista matemático, trata-se de estudar vetores unitários do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , módulo a identificação de vetores linearmente dependentes. Há muita matemática para ser aí estudada, incluindo espaços projetivos e o produto de Segre[7]. Assim, a compreensão detalhada deste primeiro exemplo deve tomar a maior parte deste um ano de projeto.

Depois dele, as possibilidades são variadas: pode-se estudar outros exemplos de emaranhamento para estados puros (ou seja, o mesmo problema de vetores unitários mas sobre outros espaços vetoriais com estrutura de produto tensorial), ou passar para o emaranhamento de estados mistos, o que matematicamente corresponde ao estudo de operadores positivos (semi-)definidos de traço um sobre os espaços vetoriais trabalhados anteriormente.

## 2 Pré-Requisitos

Será assumido que o bolsista conhece álgebra linear (como da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear). Conhecimento de mecânica quântica é bem-vindo, mas não será exigido. Se for necessário, será trabalhado.

### 3 Plano de Estudos

Assumidos os pré-requisitos acima, a proposta de plano de estudos é:

- Estudar classes de equivalência e espaços quocientes;
- Estudar a *esfera de Bloch*, que corresponde ao caso de um qubit, e que matematicamente corresponde à *fibração de Hopf*  $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$ ;
- Estudar o produto tensorial de espaços vetoriais;
- Estudar o artigo [8];
- Estudar em detalhes o conjunto dos estados puros de dois qubits, conforme discutido acima.

Acredito que os itens acima consumam o ano de 2005, e dêem ao estudante o conhecimento de conceitos matemáticos usualmente adiados até mesmo de maneira infinita, mas que são acessíveis a bons estudantes ainda na graduação.

### 4 Resultados Previstos

É previsto que o estudante saiba bem descrever o conjunto de estados puros de dois qubits, e que tenha familiaridade e segurança com o conhecimento matemático envolvido no assunto. A descrição deste conjunto é o objetivo primeiro deste projeto, e deverá ser o tema da exposição do estudante na Semana de Iniciação Científica. É também desejável e adequado que o estudante prepare uma monografia ao final do projeto.

### Referências

- [1] E. Schrödinger, “Discussion of probability relations between separated systems,” *Proc. Camb. Phil. Soc.* **31**, 555 (1935).
- [2] A. Einstein, Podolsky e N. Rosen, “Can quantum mechanics be considered a complete theory?,” *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [3] J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [4] M.A. Nielsen e I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [5] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [6] M.O. Terra Cunha, “*Emaranhamento: dos gatos de Schrödinger à Álgebra multilinear*”, II Bienal da SBM (SBM, Salvador, 2004).
- [7] J. Harris, *Algebraic Geometry - A First Course*, (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [8] D.C. Brody e L.P. Hughstone, “Geometric quantum mechanics,” *J. Geom. Phys.* **38**, 19 (2001).