

Desigualdades de Bell: Uma introdução à não-localidade quântica

Marco Túlio Coelho Quintino Mateus Araújo Santos

27 de maio de 2011

1 Introdução

“I would not call entanglement one but rather the characteristic trait of quantum mechanics”

Erwin Schrödinger

Em 1935, durante suas investigações sobre fundamentos da mecânica quântica, Einstein, Podolsky e Rosen levantaram perguntas sobre a realidade das propriedades físicas de um sistema que possui suas partes espacialmente separadas [1]. Estas perguntas ficaram por muito tempo amarradas a discussões filosóficas sem rigor matemático ou evidências experimentais. Foi apenas em 1964 que John S. Bell mostrou que exigir que uma variável seja capaz de prever o resultado das medições feitas em duas partes separadas de um sistema impõe restrições nas correlações entre essas [2]. Em especial, a mecânica quântica prevê correlações que não podem ser atingidas por teorias ditas realistas locais. Assim, a não-localidade revela informações sobre o significado dos postulados da mecânica quântica.

Este trabalho pretende introduzir a não-localidade quântica de forma clara e consistente, utilizando uma abordagem intuitiva. Para uma introdução mais rigorosa e completa, indicamos [3].

2 Estados de Bell

“Hilbert space is a big place”

Carlton Caves

O emaranhamento é talvez a característica mais peculiar da mecânica quântica. Ele surge devido à estrutura do produto tensorial, que é a ferramenta matemática utilizada para tratar sistemas quânticos de duas ou mais partes¹. O que ele tem de interessante é que o espaço $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ formado tomando-se o produto tensorial de dois espaços \mathcal{V} e \mathcal{W} é muito maior do que se juntássemos

¹O leitor pode encontrar as propriedades relacionadas ao produto tensorial no apêndice A.

os dois espaços de forma ingênua, como na mecânica clássica; essa diferença é onde moram os estados² emaranhados.

Definição 1. *Seja $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ o espaço vetorial que descreve um sistema quântico composto pelos subsistemas descritos por \mathcal{V} e \mathcal{W} . Estados que podem ser escritos como $|\psi\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle$, com $|v\rangle \in \mathcal{V}$ e $|w\rangle \in \mathcal{W}$ são chamados de estados fatoráveis.*

Uma análise superficial de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ pode nos levar à ideia de que ele é formado somente por estados fatoráveis; mas isso é falso, pois um espaço vetorial admite qualquer combinação linear dos elementos de sua, no caso os vetores da forma $|v\rangle \otimes |w\rangle$.

Definição 2. *Estados não-fatoráveis são estados emaranhados.*

Para ilustrar os estados emaranhados, vamos definir os famosos pares de Bell.

$$\begin{aligned} |\phi_+\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), & |\phi_-\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |\psi_+\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), & |\psi_-\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned}$$

Teorema 3. *Todos os pares de Bell são estados emaranhados.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema para apenas um dos quatro pares de Bell, já que para os outros três a demonstração é totalmente análoga.

Suponha que o estado $|\phi_+\rangle$ possa ser escrito como

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle),$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Então temos a igualdade:

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle.$$

A ortogonalidade dos vetores $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ nos impõe as condições:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \alpha\delta &= 0, \\ \beta\gamma &= 0, & \beta\delta &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

que não podem ser satisfeitas simultaneamente. □

3 Transmissão de informação?

Vamos assumir que Alice e Bob não têm acesso a comunicação, mas compartilham o estado $|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Suponha que Bob mede seu qubit na base computacional e obtém 0. Então o postulado da medição nos diz

²Nesse trabalho nos restringimos a considerar estados puros.

que a partir deste momento o estado compartilhado é $|00\rangle$, e o qubit de Alice passou de algo indeterminado para $|0\rangle$. Einstein se referiu a este efeito como “*spooky action at a distance*”, e viu aí algo estranho. Uma medição feita por Bob modificou instantaneamente o estado de Alice!

E podemos transmitir informação através dessa ação fantasmagórica? Alguém poderia pensar em um protocolo da forma: caso Bob deseje enviar o bit 0, ele deve obter o resultado 0; caso ele queira enviar 1, ele deve obter o resultado 1. Mas Bob não pode “obrigar” sua medição a retornar o valor desejado...

Além disso, repare que na linguagem da relatividade não podemos definir antes ou depois; existe uma transformada de Lorentz que nos leva a ver o estado de Alice colapsando para $|0\rangle$ antes de Bob realizar sua medição!

O problema é que estamos interpretando o estado de Alice como algo com realidade física, quando ele é apenas um instrumento para calcular probabilidades. Quando dizemos que o estado de Alice colapsa para $|0\rangle$ quando Bob obtém 0 a afirmação concreta que fazemos é apenas que $p_{a=0|b=0} = 1$. Mas isso já sabíamos desde o começo! E mais, conseguimos imaginar um sistema físico clássico que tem as mesmas propriedades: imagine agora que Alice e Bob compartilhem uma moeda de 50 centavos. Eles a serram ao meio, e colocam as duas metades em envelopes diferentes, sem olhar. Bob viaja para Marte e Alice para Vênus. Bob abre seu envelope, e mede sua metade da moeda como estando no estado “cara”. Então o estado da metade da moeda no envelope de Alice instantaneamente se colapsa para “coroa”. Ora, que bobagem! Novamente esse colapso significa apenas que $p_{a=coroa|b=cara} = 1$, nada que já não soubéssemos antes. Já o resultado de Alice de fato a informa algo sobre Bob; mas é uma informação que já existia³, e não uma que Bob está tentando lhe enviar.

Podemos fortalecer essa discussão provando que de fato medições quânticas não permitem a transmissão de informação.

Teorema 4. *Medições realizadas na parte A de um sistema não podem revelar informações sobre medições realizadas na parte B.*

Demonstração. Considere que Alice e Bob compartilham o estado possivelmente emaranhado $|\psi_{AB}\rangle$, e estão realizando medições com os observáveis A e B , respectivamente. Então a probabilidade de Alice obter a saída a e Bob obter a saída b é dada por

$$p_{a,b|A,B} = |\langle a| \otimes \langle b| \psi_{AB} \rangle|^2 = \langle \psi_{AB} | (|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|) | \psi_{AB} \rangle$$

Mas fazendo as medições localmente Alice tem acesso apenas à distribuição

³Esse é um ponto no qual os estados emaranhados ficarão interessantes. Mais sobre isso na seção 4.

marginal

$$\begin{aligned}
 p_{a|A,B} &= \sum_b \langle \psi_{AB} | (|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|) | \psi_{AB} \rangle \\
 &= \langle \psi_{AB} | \left(|a\rangle\langle a| \otimes \left(\sum_b |b\rangle\langle b| \right) \right) | \psi_{AB} \rangle \\
 &= \langle \psi_{AB} | (|a\rangle\langle a| \otimes \mathbb{1}) | \psi_{AB} \rangle
 \end{aligned}$$

que já não tem mais nenhuma dependência em relação às medições realizadas por Bob, então é lícito escrever

$$p_{a|A,B} = p_{a|A}$$

que é simplesmente o enunciado do teorema em termos mais precisos. \square

Que fique claro que este teorema quer dizer apenas que as regras da mecânica quântica não permitem a transmissão de informação através do “colapso da função de onda” — evidentemente não podemos com isso provar a não-sinalização; ele é um princípio, independente de teorias específicas.

Concluindo: apesar do postulado da medição afirmar que o estado de Alice se modifica imediatamente após a medição de Bob, não é possível medir essa modificação. Logo, para um olhar positivista, não existe ação à distância.

4 Realismo, localidade e não-sinalização

Esta é uma parte delicada do trabalho, pois as definições que serão feitas são fundamentais para a compreensão da não-localidade, e elas facilmente se confundem. Para facilitar a compreensão vamos tratar apenas de sistemas com duas partes. A parte A tem à sua disposição uma coleção de propriedades X que podem ser mensuradas. Medir uma certa propriedade $x \in X$ retorna um resultado $a \in x$. A parte B tem uma coleção de propriedades Y , e medir $y \in Y$ retorna um resultado $b \in y$.

Vamos denotar por $p_{a,b|x,y}$ a probabilidade dos resultados a e b serem obtidos, dado que as medições x e y foram realizadas.

A descrição individual de cada sistema é feita pelas probabilidades marginais,

$$p_{a|x,y} = \sum_b p_{a,b|x,y}.$$

Repare que estamos permitindo que a medição de Alice dependa da propriedade y que Bob deseja medir. Podemos imaginar uma situação em que realizar a medição y comunica algo para o receptor de x . É justamente para garantir que não teremos essa comunicação que vamos definir não-sinalização.

4.1 Não-sinalização

Definição 5 (Não-sinalização). *As diferentes partes do sistema não trocam informação entre si. Isto é, $p_{a|x,y} = p_{a|x}$ e $p_{b|x,y} = p_{b|y}$.*

Vale lembrar do teorema 4, que as probabilidades previstas para sistemas quânticos bipartites respeitam a condição de não-sinalização.

Perceba que a condição de não-sinalização não é suficiente para garantir que uma medição esteja descorrelacionada da outra. Vamos dizer que duas medições estão correlacionadas quando $p_{a,b|x,y} \neq p_{a|x}p_{b|y}$.

Além do caso de estados emaranhados, o leitor pode construir um simples exemplo dessas correlações com a caixa Popescu-Rohrlich [4], que será discutida em 8.

4.2 Realismo

"I recall that during one walk Einstein suddenly stopped, turned to me and asked whether I really believed that the moon exists only when I look at it. The rest of this walk was devoted to a discussion of what a physicist should mean by the term "to exist"."

Abraham Pais

Os *elementos de realidade* de Einstein [1] se baseiam na ideia de que existe uma teoria na qual todos os resultados de medições podem (pelo menos em princípio) ser previstos com probabilidade 1.

O realismo está associado à noção de que o resultado de nossas observações já está pré-determinado. A ideia informal se baseia no fato de que quando observamos uma bola verde, apenas *descobrimos* que ela é verde. Deve haver uma variável que *sabe* a cor de todas as bolas, nós apenas não temos acesso a ela.

Definição 6 (Realismo). *Determinado o sistema conjunto AB , existe uma variável λ tal que $p_{a,b|x,y,\lambda}$ é 1 ou 0, $\forall a \in x, b \in y, x \in X, y \in Y$.*

4.3 Localidade

Mesmo assumindo a existência da variável λ , ainda podemos ter $p_{a,b|x,y,\lambda} \neq p_{a|x,\lambda}p_{b|y,\lambda}$.

Uma hipótese natural é que tendo o conhecimento de λ , vamos saber a origem de todas correlações, logo todos os eventos passam a se tornar independentes. Equivalentemente, poderemos assumir que todas as correlações têm sua origem no passado.

Definição 7 (Localidade). *Dado λ , sempre vamos ter $p_{a,b|x,y,\lambda} = p_{a|x,\lambda}p_{b|y,\lambda}$.*

Teorema 8. *Todas as correlações de uma teoria realista local satisfazem a condição de não-sinalização*

Demonstração.

$$\begin{aligned} p_{a|x,y,\lambda} &= \sum_b p_{a|x,\lambda} p_{b|y,\lambda} \\ &= p_{a|x,\lambda} \left(\sum_b p_{b|y,\lambda} \right) \\ &= p_{a|x,\lambda}. \end{aligned}$$

□

5 Singleto

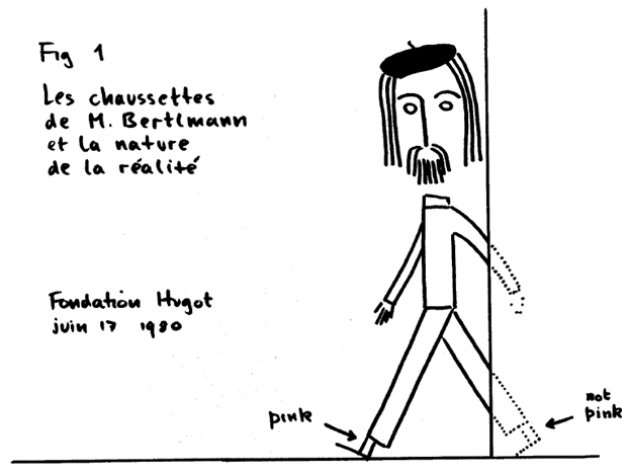


Figura 1: As meias de Bertlmann

O estado $|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ possui propriedades interessantes que serão abordadas nesta seção. Este estado recebeu o apelido de singleto devido a estudos na teoria de spin $1/2$, onde o estado representa uma partícula de spin total igual a zero. E é exatamente esta propriedade que vamos explorar. Note que ele é perfeitamente anti-correlacionado, *i.e.*, sempre que Alice obtiver $+$, Bob vai obter $-$, e *vice versa*. Mas o que o torna único é que essa anti-correlação continua existindo se medirmos seu spin em qualquer direção; não apenas naquela na qual ele foi preparado. Isso é apenas consequência de seu spin total ser zero: o vetor zero continua igual, de qualquer direção que é olhado.

Para provar isso, basta notar que medir o spin noutra direção é simplesmente fazer uma mudança de base e medir na direção original, e o singleto é invariante em relação a mudanças de base locais, como é provado no apêndice B. O que é importante desse teorema é que para preservar a anti-correlação Alice e Bob têm de medir o singleto na mesma direção, *i.e.*, se um mede na direção \hat{z} e outro na direção \hat{x} seus resultados não estão mais anti-correlacionados.

Um olhar superficial pode indicar que esta anti-correlação não apresenta nenhuma característica surpreendente. Em [5], Bell conta a história de Bertlmann, um homem que sempre usa suas meias com cores diferentes. Se você vê (como na figura 1) que ele está com um pé de meia rosa, já sabe com certeza que o outro não é rosa.

Mas perceba que as meias de Bertlmann não têm a mesma correlação que um sistema descrito pelo singleto, pois não podemos fazer mudanças de base; e o singleto apresenta anti-correlação em qualquer base. Isso começa a mostrar aonde que a mecânica quântica apresenta correlações mais fortes que meias ou moedas de 50 centavos.

6 Desigualdade de Wigner

Vamos agora usar as propriedades do singleto para mostrar que não podemos criar uma teoria realista local que prevê as mesmas probabilidades da mecânica quântica⁴.

Alice e Bob compartilham várias cópias do estado $|\psi_-\rangle$. Eles combinam realizar suas medições em relação a 3 direções no espaço, \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} . Matematicamente, medir o spin nessas direções é medir os observáveis $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, que são definidos por

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv n_x X + n_y Y + n_z Z,$$

onde \mathbf{n} é um vetor normalizado em \mathbb{R}^3 e X , Y e Z são as matrizes de Pauli.

Para essa escolha de observáveis, ambos só podem obter os resultados $+1$ ou -1 , correspondendo a spin pra cima ou pra baixo e, como vimos na seção anterior, no caso de escolherem os mesmos observáveis, vão ter resultados necessariamente anti-correlacionados.

Vamos agora assumir realismo e não-sinalização e analisar as condições impostas por estas. Seja $(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_-)$ o estado da partícula que retorna $+1$ para o observável $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $+1$ para $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ e -1 para $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Podemos escrever todos os estados possíveis de maneira análoga e construir uma tabela que atribui probabilidades aos estados de Alice e Bob.

Probabilidade	Estado de Alice	Estado de Bob
P_1	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_+)$	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_-)$
P_2	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_-)$	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_+)$
P_3	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_+)$	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_-)$
P_4	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_-)$	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_+)$
P_5	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_+)$	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_-)$
P_6	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_-)$	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_+)$
P_7	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_+)$	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_-)$
P_8	$(\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_-, \mathbf{c}_-)$	$(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+, \mathbf{c}_+)$

Tabela 1: Todos os possíveis estados permitidos por uma teoria realista local.

Pode parecer que utilizamos apenas o realismo para montar a tabela acima, mas repare por exemplo no grupo P_1 . Se Alice medir $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ela vai obter $+1$, e este fato independe da escolha da medição feita por Bob.

Da tabela 1 podemos obter as probabilidades dos resultados de Alice e Bob dado um observável. Por exemplo

$$p(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+) = P_3 + P_4,$$

que é a probabilidade de Alice obter $+1$ ao medir o observável $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, e de Bob obter $+1$ ao medir o observável $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. De maneira análoga:

$$p(\mathbf{a}_+, \mathbf{c}_+) = P_2 + P_4, \quad p(\mathbf{c}_+, \mathbf{b}_+) = P_3 + P_7.$$

⁴A abordagem que vamos usar nesta seção foi feita por Bell em [5] e é baseada do trabalho de Wigner [6].

Assim temos a desigualdade⁵

$$p(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+) \leq p(\mathbf{a}_+, \mathbf{c}_+) + p(\mathbf{c}_+, \mathbf{b}_+). \quad (1)$$

Vamos analisar as probabilidades previstas pela mecânica quântica. Considere $p(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+)$, neste as regras da mecânica quântica nos afirmam que a probabilidade é

$$\langle \psi_- | (|a_+\rangle\langle a_+| \otimes |b_+\rangle\langle b_+|) | \psi_- \rangle.$$

Logo, basta encontrar os autovetores do observável $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, e fazer as contas. Mas podemos evitar algumas contas se pensarmos que Alice mede \mathbf{a}_+ com probabilidade $1/2$, e o fato de Alice obter \mathbf{a}_+ implica que o estado de Bob será descrito por $|a_-\rangle$. Dado este estado, a probabilidade⁶ de Bob obter \mathbf{b}_+ é

$$|\langle a_- | b_+ \rangle|^2 = \sin^2(\theta_{ab}/2),$$

onde $\theta_{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é o ângulo entre os eixos \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Assim,

$$p(\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_+) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right).$$

E usando (1) podemos escrever

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right) \leq \sin^2\left(\frac{\theta_{ac}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_{cb}}{2}\right).$$

Tomando $\theta_{ab} = \theta$, $\theta_{ac} = 2\theta$ e $\theta_{cb} = 2\theta$ com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, a desigualdade não é respeitada.

Este exemplo mostra que as correlações do estado singleto não podem ser obtidas de uma teoria realista local. Desigualdades que são capazes de “separar” teorias realistas locais da mecânica quântica são chamadas de *Desigualdades de Bell*. Na próxima seção veremos que esta não-localidade da mecânica quântica está diretamente relacionada com o emaranhamento.

7 CHSH

A desigualdade *CHSH*, proposta por Clauser, Horne, Shimony e Holt em 1969 [7], é provavelmente a desigualdade de Bell mais conhecida. Grande parte de sua fama se deve ao fato dela ter sido utilizada em trabalhos pioneiros para verificação experimental de desigualdades de Bell [8] e, por além de impor uma cota superior a teorias realistas e locais, impõe também uma cota superior para a mecânica quântica [9].

Tome o cenário em que duas partes (*A* e *B*) podem medir duas propriedades de um sistema com duas possíveis saídas para cada propriedade. As

⁵No trabalho original, Wigner interpreta essa desigualdade como “O número de mulheres novas é menor ou igual ao número de mulheres fumantes mais o número de pessoas novas não fumantes”.

⁶Para simplificar mais as contas, note que podemos escolher \mathbf{b} como sendo um vetor unitário na direção de \mathbf{z} , assim $|b_+\rangle = |0\rangle$, e precisamos apenas do autovetor de $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ associado ao autovalor -1 .

probabilidades conjuntas serão descritas⁷ por $p_{a,b|x,y}$, com $a, b, x, y \in \{0, 1\}$. Defina:

$$\begin{aligned} \beta_{CHSH} \equiv & p_{a=b|0,0} - p_{a \neq b|0,0} + p_{a=b|0,1} - p_{a \neq b|0,1} \\ & + p_{a=b|1,0} - p_{a \neq b|1,0} - p_{a=b|1,1} + p_{a \neq b|1,1}, \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} p_{a=b|x,y} &= p_{0,0|x,y} + p_{1,1|x,y}, \\ p_{a \neq b|x,y} &= p_{0,1|x,y} + p_{1,0|x,y}. \end{aligned}$$

Como p representa probabilidades, temos $p \in [0, 1]$, e é trivial verificar que $|\beta_{CHSH}| \leq 4$.

Assumindo realismo e localidade, pode-se demonstrar que

$$|\beta_{CHSH}| \leq 2.$$

Vamos tratar o caso da mecânica clássica na próxima seção, mas para uma prova com este formalismo de metateoria, veja [3].

7.1 CHSH na mecânica quântica

Sejam A_0 e A_1 observáveis unitários⁸ que vão representar as propriedades que Alice vai medir. Sejam B_0 e B_1 as propriedades que Bob vai medir.

É conveniente fazer uma mudança de notação; vamos usar $a, b \in \{-1, 1\}$. Mas repare que o β_{CHSH} definido na equação (2) independe dos valores que a e b podem assumir.

Vamos calcular o valor esperado do observável $A_x \otimes B_y$ para um certo estado $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle A_x \otimes B_y \rangle_{|\psi\rangle} &= \sum_{a=\pm 1} \sum_{b=\pm 1} ab p_{a,b|x,y} \\ &= p_{-1,-1|x,y} - p_{1,-1|x,y} - p_{-1,1|x,y} + p_{1,1|x,y} \\ &= p_{a=b|x,y} - p_{a \neq b|x,y}. \end{aligned}$$

Agora podemos escrever:

$$\beta_{CHSH} = \langle A_0 \otimes B_0 \rangle_{|\psi\rangle} + \langle A_0 \otimes B_1 \rangle_{|\psi\rangle} + \langle A_1 \otimes B_0 \rangle_{|\psi\rangle} - \langle A_1 \otimes B_1 \rangle_{|\psi\rangle},$$

que nos motiva a definir um observável Bell associado a desigualdade CHSH,

$$\mathcal{B}_{CHSH} \equiv A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1.$$

Com o operador \mathcal{B}_{CHSH} em mãos, podemos calcular o valor esperado para algum estado qualquer, e verificar se a mecânica quântica respeita $|\beta_{CHSH}| \leq 2$.

⁷Lembrando que a é o valor obtido por Alice ao medir o observável x e b o valor obtido por Bob ao medir y .

⁸Logo, um operadores auto-adjuntos e unitários, que sempre têm autovalores $+1$ e -1 .

As correlações de estados da forma $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ sempre podem ser descritas por teorias realistas locais, pois neste caso temos

$$\langle A_0 \otimes B_0 \rangle_{|\psi\rangle} = \langle a|A_0|a\rangle \langle b|B_0|b\rangle.$$

Assim, podemos tomar os observáveis A_0, A_1, B_0 e B_1 como números reais que pertencem ao intervalo $[0, 1]$, que nos permite fazer

$$\begin{aligned} \beta_{CHSH} &= A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 - A_1B_1 \\ &= A_0(B_0 - B_1) + A_1(B_0 + B_1) \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

O leitor que se interessar na construção de uma teoria realista e local que simula os resultados da mecânica quântica para estados fatoráveis pode buscar a tese de Benjamin Francis Toner [10].

No caso da mecânica clássica, todos operadores comutam entre si, logo podemos diagonalizar simultaneamente os operadores A_0, A_1, B_0 e B_1 . Assim eles podem também ser tratados como números reais, fato que implica em $|\beta_{CHSH}| \leq 2$ [11].⁹

Vamos agora exibir um exemplo mais interessante. Tome o estado $|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ e os operadores

$$\begin{aligned} A_0 &= X, \quad A_1 = Z, \\ B_0 &= \frac{X+Z}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = \frac{X-Z}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_{CHSH} \rangle_{|\psi_-\rangle} &= \langle \psi_- | \left(X \otimes \frac{X+Z}{\sqrt{2}} \right) | \psi_- \rangle + \langle \psi_- | \left(X \otimes \frac{X-Z}{\sqrt{2}} \right) | \psi_- \rangle \\ &\quad + \langle \psi_- | \left(Z \otimes \frac{X+Z}{\sqrt{2}} \right) | \psi_- \rangle - \langle \psi_- | \left(Z \otimes \frac{X-Z}{\sqrt{2}} \right) | \psi_- \rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

que é uma violação da desigualdade CHSH.

Mas será que todo estado emaranhado apresenta não-localidade? A resposta é sim! Este teorema é demonstrado no apêndice C. E no apêndice D vamos demonstrar que, respeitando os postulados da mecânica quântica, $2\sqrt{2}$ é também o valor máximo que β_{CHSH} pode atingir. O que nos leva à seguinte

⁹Vale notar que o fato da mecânica quântica permitir observáveis não compatíveis, *i.e.*, descritos por operadores que não comutam, é apontado como sua principal diferença sobre a mecânica clássica, onde todos observáveis são compatíveis. Muitos físicos gostam de introduzir mecânica quântica assumindo que os observáveis posição e momento não são compatíveis.

pergunta: por quê não mais? Vamos discutir não-localidade supra-quântica na próxima seção.

8 Caixas Popescu-Rohrlich

Ao analisar a não-localidade permitida pela mecânica quântica, Sandu Popescu e Daniel Rohrlich tiveram a ideia de assumir não-localidade como um axioma e derivar os postulados da mecânica quântica [4].

Nesta busca, eles construíram um artefato teórico que respeita a condição de não-sinalização e que tem exatamente $\beta_{CHSH} = 4$. Este artefato ficou conhecido como caixa de Popescu-Rohrlich, ou caixa PR. A caixa PR garante que os resultados a e b de Alice e Bob sempre estejam correlacionados com as propriedades x e y satisfazendo a seguinte relação:

$$a \oplus b = x.y,$$

onde o símbolo \oplus é entendido como soma módulo 2.

Os resultados da caixa são descritos por:

$$\begin{aligned} p_{a,b|x,y} &= 1/2, & \text{se } a + b = x.y; \\ p_{a,b|x,y} &= 0, & \text{se } a + b \neq x.y. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que a caixa PR satisfaz a condição de não-sinalização:

$p_{0,0 0,0} = 1/2$	$p_{0,0 0,1} = 1/2$
$p_{0,1 0,0} = 0$	$p_{0,1 0,1} = 0$
$p_{1,0 0,0} = 0$	$p_{1,0 0,1} = 0$
$p_{1,1 0,0} = 1/2$	$p_{1,1 0,1} = 1/2$
$p_{0,0 1,0} = 1/2$	$p_{0,0 1,1} = 0$
$p_{0,1 1,0} = 0$	$p_{0,1 1,1} = 1/2$
$p_{1,0 1,0} = 0$	$p_{1,0 1,1} = 1/2$
$p_{1,1 1,0} = 1/2$	$p_{1,1 1,1} = 0$

Tabela 2: Probabilidades $p_{a,b|x,y}$ da caixa PR

$p_{a|x,y} = p_{a,0|x,y} + p_{a,1|x,y} = p_{a|x}$. Mesmo Alice sabendo x e a , ela não tem informações sobre y nem b .

Perceba também que

$$\begin{aligned} p_{a=b|00} &= p_{a=b|01} = p_{a=b|10} = p_{a \neq b|11} = 1; \\ p_{a \neq b|00} &= p_{a \neq b|01} = p_{a \neq b|10} = p_{a=b|11} = 0, \end{aligned}$$

então temos $\beta_{CHSH} = 4$.

A caixa PR serviu para mostrar que podemos obter valores maiores que $2\sqrt{2}$ para β_{CHSH} que respeitam a condição de não-sinalização. Um resultado interessante desta “super não-localidade” é enunciado como: caixas PR trivializam a comunicação. De maneira informal, caso Alice e Bob compartilhem uma caixa PR, toda decisão conjunta do tipo sim/não pode ser tomada com as

partes trocando apenas um bit de informação. Para o resultado mais formal, veja o apêndice E.

A Propriedades do produto tensorial

Como o produto tensorial é bastante útil para a teoria quântica da informação e geralmente não é apresentado em cursos introdutórios de álgebra linear, é válido defini-lo apropriadamente. Vamos apresentar as propriedades do produto tensorial como feito na ref. [12].

Definição 9. *Sejam \mathcal{V} e \mathcal{W} espaços vetoriais complexos, $|v\rangle \in \mathcal{V}$ e $|w\rangle \in \mathcal{W}$. Criamos um novo elemento $|v\rangle \otimes |w\rangle$, chamado produto tensorial de $|v\rangle$ com $|w\rangle$. O produto tensorial dos espaços vetoriais \mathcal{V} e \mathcal{W} , denotado $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, será o espaço vetorial gerado pelos vetores da forma $|v\rangle \otimes |w\rangle$, sujeito às relações*

1. $(\lambda|v\rangle) \otimes |w\rangle = \lambda(|v\rangle \otimes |w\rangle) = |v\rangle \otimes (\lambda|w\rangle)$;
2. $(|u\rangle + |v\rangle) \otimes |w\rangle = |u\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w\rangle$;
3. $|v\rangle \otimes (|w\rangle + |z\rangle) = |v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |z\rangle$,

para todos $|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{V}$ e $|w\rangle, |z\rangle \in \mathcal{W}$.

Definição 10. *Considere agora que \mathcal{V} e \mathcal{W} possuem produto interno. Para $|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{V}$ e $|w\rangle, |z\rangle \in \mathcal{W}$, define-se o produto interno $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ por*

$$(\langle u| \otimes \langle z|)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = \langle u|v\rangle \langle z|w\rangle.$$

Para tratar dos operadores de \mathcal{V} e \mathcal{W} agindo em elementos de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, usamos o produto de Kronecker.

Definição 11. *Seja $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ e $B : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, define-se $A \otimes B$ como*

$$(A \otimes B)|v\rangle \otimes |w\rangle \equiv A|v\rangle \otimes B|w\rangle.$$

Dois conceitos ligados ao produto tensorial que vamos utilizar são os de operação local e medição local.

Definição 12. *Seja $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ e $B : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$. Operações da forma $A \otimes B$ são chamadas de operações locais.¹⁰*

Medições locais são medições feitas com operadores da forma $M_i \otimes M_j$.

Na definição acima, usamos um espaço vetorial que é escrito como $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Mas repare que podemos ter $\mathcal{W} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$. Estados que são escritos como vetores de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ são chamados estados bipartites. No caso de mais partes (como em $\mathcal{V} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$), falamos que é um estado multipartite.

Apesar da notação mais precisa para o produto tensorial de dois vetores ser $|v\rangle \otimes |w\rangle$, ela facilmente se torna pesada. Há duas outras notações bastante utilizadas, que são boas sempre que não oferecem riscos de má compreensão:

$$|v\rangle \otimes |w\rangle \equiv |v\rangle|w\rangle \equiv |vw\rangle.$$

¹⁰Podemos entender as operações locais como a aplicação das extensões triviais de A e B , i.e., $A \otimes I$ e $I \otimes B$. Já que $(A \otimes I)(B \otimes I) = (B \otimes I)(A \otimes I)$.

B Singleto

Teorema 13. Para qualquer operador unitário $U : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ da forma $U = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ temos que $U \otimes U |\psi_-\rangle = -|\psi_-\rangle$. Ou seja, o singleto é invariante em relação a unitárias locais¹¹.

Demonstração. Segue da definição que um operador unitário preserva a ortogonalidade de dois vetores. Então, podemos parametrizar a ação de U como

$$\begin{aligned} U|0\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle; \\ U|1\rangle &= \beta^*|0\rangle - \alpha^*|1\rangle, \end{aligned}$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Vamos aplicar diretamente $U \otimes U$ em $|\psi_-\rangle$:

$$\begin{aligned} U \otimes U |\psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U \otimes U |01\rangle - U \otimes U |10\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\beta^*|0\rangle - \alpha^*|1\rangle) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta^*|0\rangle - \alpha^*|1\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta^*|00\rangle - |\alpha|^2|01\rangle + |\beta|^2|10\rangle - \alpha^*\beta|11\rangle) \\ &\quad - \alpha\beta^*|00\rangle - |\beta|^2|01\rangle + |\alpha|^2|10\rangle + \alpha^*\beta|11\rangle) \\ &= -(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \\ &= -|\psi_-\rangle. \end{aligned}$$

□

C Teorema de Gisin

Como vimos, a não-localidade é característica de estados emaranhados. Mas será que todos estados emaranhados exibem não-localidade?

Esta pergunta foi respondida (para o caso de sistemas bipartites) em 1991 por Gisin [13].

Teorema 14. Todo sistema emaranhado bipartite viola alguma desigualdade CHSH.

Demonstração. Seja $|\psi\rangle$ um estado emaranhado. Usando a decomposição de Schmidt ele pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\chi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle.$$

¹¹Lembrando que a fase global é irrelevante.

A condição de emaranhamento impõe que pelo menos c_1 e c_2 são maiores que zero. Vamos então definir:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= c_1|\chi_1\rangle|\phi_1\rangle + c_2|\chi_2\rangle|\phi_2\rangle; \\ |\psi_2\rangle &= \sum_{i>2} c_i|\chi_i\rangle|\phi_i\rangle; \end{aligned}$$

assim, $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$.

O vetor¹² $|\psi_1\rangle$ pode ser tratado como um sistema de dois qubits e, para simplificar a notação vamos escrever $|\psi_1\rangle = c_1|01\rangle + c_2|10\rangle$.

Tomemos os observáveis unitários como:

$$\begin{aligned} A_0 &= Z; \\ A_1 &= -X; \\ B_y &= \sin \alpha_y X + Z \cos \alpha_y. \end{aligned}$$

Assim vamos ter

$$\beta_{CHSH} = \cos \alpha_0 - \cos \alpha_1 + 2c_1c_2(\sin \alpha_0 + \sin \alpha_1),$$

e o máximo se encontra em $\cos \alpha_0 = -\cos \alpha_1 = (1 + 4(c_1c_2)^2)^{-1/2}$, então temos

$$\beta_{CHSH} = 2\sqrt{1 + 4(c_1c_2)^2},$$

que é estritamente maior que 2. \square

Em 2010 o teorema de Gisin foi estendido; demonstrou-se que todo estado emaranhado multipartite (puro) viola alguma desigualdade de Bell [14].

Assim, temos uma ligação direta entre emaranhamento e não-localidade.

D A cota de Tsirelson

Teorema 15. *Assumindo os postulados de mecânica quântica, temos necessariamente que $|\beta_{CHSH}| \leq 2\sqrt{2}$.*

Demonstração. Vamos calcular

$$\mathcal{B}_{CHSH}^2 = (A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_0 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1)^2.$$

Uma conta direta nos leva a:

$$\mathcal{B}_{CHSH}^2 = 4I - [A_0, A_1] \otimes [B_0, B_1].$$

Defina $\|A\|$ como o maior valor singular do operador A . Assim, temos

$$\|[V, W]\| \leq 2\|V\| \|W\|, \quad \|V \otimes W\| = \|V\| \|W\| \quad \text{e} \quad \|V^2\| = \|V\|^2,$$

que nos permite escrever

$$\|\mathcal{B}_{CHSH}\|^2 \leq 4 + 4\|A_0\| \|A_1\| \|B_0\| \|B_1\|.$$

¹²Perceba que $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ no caso geral não são estados. Pois não são necessariamente vetores normalizados, apenas $|\psi\rangle$ tem obrigatoriamente norma 1.

Como os autovalores dos nossos operadores são -1 ou 1 , temos

$$\|\mathcal{B}_{CHSH}\|^2 \leq 8, \quad \text{ou simplesmente} \quad \|\mathcal{B}_{CHSH}\| \leq 2\sqrt{2}.$$

Agora, basta tomar como estado o autovetor associado ao maior valor singular de \mathcal{B}_{CHSH} para concluir que:

$$\max |\beta_{CHSH}| = 2\sqrt{2}.$$

□

E Comunicação trivial

O problema abordado pela complexidade de comunicação pode ser encarado da seguinte forma: quantos bits Alice e Bob precisam trocar para computar a função $f : A \times B \rightarrow Z$, onde Alice tem acesso apenas aos elementos de A e Bob apenas os elementos de B .

Vamos nos restringir as funções de decisão, que são as funções onde $A = B = \{0, 1\}^n$ e $Z = \{0, 1\}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Definição 16. Seja $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, onde os primeiros n bits, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ pertencem a parte A , e os outros n bits, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ parte B .

A complexidade de comunicação (CC) da função f é o número mínimo de bits (clássicos) que as partes precisam trocar para que A possa ter certeza do valor de $f(\vec{a}, \vec{b})$ para qualquer entrada $(\vec{a}, \vec{b}) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$.

Perceba que a complexidade de comunicação é dada pelo *pior caso*. Pois ela é calculada sem assumir *a priori* que as partes têm um (\vec{a}, \vec{b}) específico.

Lema 17. Toda função $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ pode ser escrita como¹³

$$\bigoplus_{i=1}^{2^n} P_i(\vec{a}) Q_i(\vec{b}),$$

onde p são polinômios em $\vec{a} \in \{0, 1\}^n$ e Q são monômios em $\vec{b} \in \{0, 1\}^n$

Demonstração. Primeiro note que qualquer função decisão pode ser escrita como polinômios em várias variáveis usando produto e soma módulo 2. Agora vamos colocar em evidência todos os monômios Q_i que dependem de \vec{b} , definindo implicitamente os polinômios p_i , que dependem apenas de \vec{a} :

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \bigoplus_i P_i(\vec{a}) Q_i(\vec{b}).$$

Então precisamos apenas contar quantos monômios Q_i podem existir. Sabemos que estes monômios podem ter a forma $Q_i = b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_n^{k_n}$, onde cada

¹³Onde o símbolo \bigoplus é entendido como somatório módulo 2.

k_j pode assumir dois valores, 0 ou 1. Assim, podemos ter 2^n monômios diferentes. Logo

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \bigoplus_{i=1}^{2^n} P_i(\vec{a})Q_i(\vec{b}).$$

□

Podemos agora provar o resultado principal, que foi apresentado por van Dam em [15, 16].

Teorema 18. *Se Alice e Bob possuem uma caixa de Popescu Rohrlich, qualquer função decisão f possui CC igual a 1.*

Demonstração. Vamos escrever f como:

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \bigoplus_i^{2^n} P_i(\vec{a})Q_i(\vec{b}).$$

Alice e Bob entram com os bits $p_i(\vec{a})$ e $Q_i(\vec{b})$ na caixa PR para obter α_i e β_i que satisfazem $P_i(\vec{a}).Q_i(\vec{b}) = \alpha_i \oplus \beta_i$. Assim temos:

$$\sum_i^{2^n} (\alpha_i \oplus \beta_i) = \left(\sum_i^{2^n} \alpha_i \right) \oplus \left(\sum_i^{2^n} \beta_i \right).$$

Repare agora que Bob pode somar os bits β_i sem precisar comunicar com Alice. Basta agora ele enviar o bit $\sum_i^{2^n} \beta_i$, para que Alice possa calcular $f(\vec{a}, \vec{b})$. □

Concluimos então que se Alice e Bob compartilham uma caixa PR, toda função decisão pode ser avaliada com apenas um bit de comunicação!



Referências

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” *Phys. Rev.* **47**, 10 (1935), pp. 777–780.
- [2] J. S. Bell. “On the Einstein-Poldolsky-Rosen paradox”. *Physics* (1964).
- [3] Marco Túlio Coelho Quintino. *Não-localidade como recurso para comunicação*. 2010. URL: <http://www.mat.ufmg.br/~tcunha/MonografiaMTulio.pdf>.
- [4] D. Rohrlich e S. Popescu. “Nonlocality as an axiom for quantum theory” (1995). arXiv:quant-ph/9508009.
- [5] J. S. Bell. “Bertlmann’s socks and the nature of reality”. *Journal de Physique Colloques* (1981).
- [6] Eugene P. Wigner. “On Hidden Variables and Quantum Mechanical Probabilities”. *Am. J. Phys.* (1970).

- [7] John F. Clauser et al. "Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories". *Phys. Rev. Lett.* **23**, 15 (1969), pp. 880–884.
- [8] Alain Aspect, Philippe Grangier e Gérard Roger. "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities". *Phys. Rev. Lett.* **49**, 2 (1982), pp. 91–94.
- [9] B. S. Cirel'son. "Quantum generalizations of Bell's inequality". *Lett. Math. Phys.* **4**, 2 (1980), pp. 93–100.
- [10] Benjamin Francis Toner. "Quantifying Quantum Nonlocality". Tese de doutorado. 2007.
- [11] B. S. Cirel'son. Comunicação particular. 2010.
- [12] Marcelo O. Terra Cunha. *Noções de Informação Quântica*. IMPA, 2007.
- [13] N. Gisin. "Bell's inequality holds for all non-product states". *Physics Letters A* **154**, 5-6 (1991), pp. 201–202.
- [14] M. Li e S.-M. Fei. "Gisin's Theorem for Arbitrary Dimensional Multipartite States". *Phys. Rev. Lett.* **104**, 24 (2010), p. 240502. arXiv:1006.3557 [quant-ph].
- [15] W. van Dam. "Nonlocality and Communication Complexity". Tese de doutorado. 1999.
- [16] W. van Dam. "Implausible Consequences of Superstrong Nonlocality" (2005). arXiv:quant-ph/0501159.