

Notas de Aula

Geometria Algébrica I

Curvas Planas Afins

1 Curvas Planas Afins

Na geometria algébrica, em vez de pensar apenas no conjunto de pontos, consideramos a curva através do seu polinômio definidor, o que permite capturar informações como multiplicidade.

Definição 1.1. *Dois polinômios $F, G \in k[X, Y]$ são **equivalentes** se existe $\lambda \in k^\times$ tal que $F = \lambda G$.*

*Uma **curva plana afim** é uma classe de equivalência de polinômios não constantes sob essa relação.*

Grau e componentes Se $F = \prod F_i^{e_i}$ é a fatoração em fatores irredutíveis, então:

- cada F_i define uma **componente irredutível**;
- e_i é a **multiplicidade** da componente;
- $e_i = 1 \Rightarrow$ componente **simples**;
- $e_i > 1 \Rightarrow$ componente **múltipla**.

O **grau** da curva é o grau de F .

2 Pontos Singulares e Tangentes

Seja $F \in k[X, Y]$ e $P = (a, b)$ um ponto tal que $F(P) = 0$.

Definição 2.1. *O ponto P é:*

- **simples** (ou não-singular) se $F_X(P) \neq 0$ ou $F_Y(P) \neq 0$;
- **singular** caso contrário.

Se P é simples, a reta tangente em P é dada por:

$$F_X(P)(X - a) + F_Y(P)(Y - b) = 0.$$

3 Multiplicidade de um Ponto

Para estudar um ponto $P = (0, 0)$, escrevemos:

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n,$$

onde cada F_i é homogêneo de grau i e $F_m \neq 0$.

Definição 3.1. O inteiro m é a **multiplicidade** de F em P , denotada por $m_P(F)$.

- $P \in F \iff m_P(F) > 0$;
- P é simples $\iff m_P(F) = 1$.

Tangentes As retas tangentes em P são os fatores lineares de F_m . Se

$$F_m = \prod L_i^{r_i},$$

então:

- cada L_i define uma reta tangente;
- r_i é sua multiplicidade.

4 Classificação de Pontos Singulares

- **Ponto múltiplo ordinário:** todas as tangentes são distintas.
- **Nó:** ponto duplo ($m = 2$) com duas tangentes distintas.
- **Cúspide:** ponto duplo com uma única tangente de multiplicidade 2.

5 Anéis de Valorização Discreta (DVR)

Proposição 5.1. Seja R um domínio de integridade que não é corpo. As seguintes condições são equivalentes:

- (1) R é Noetheriano, local, com ideal maximal principal;
- (2) existe $t \in R$ irredutível tal que todo $z \neq 0$ pode ser escrito unicamente como

$$z = ut^n,$$

onde u é unidade e $n \geq 0$.

Definição 5.2. Um anel que satisfaz essas condições é chamado de **anel de valorização discreta (DVR)**.

Propriedades

- t é um **parâmetro uniformizante**;
- os ideais são exatamente (t^n) ;
- todo DVR é um domínio de ideais principais (PID).

6 Função Ordem

Seja K o corpo de frações de R . Para $z \in K^\times$, escrevemos

$$z = ut^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Definição 6.1. *Define-se a **ordem** de z por:*

$$\text{ord}(z) = n, \quad \text{ord}(0) = \infty.$$

Então:

$$R = \{z \in K \mid \text{ord}(z) \geq 0\}, \quad \mathfrak{m} = \{z \in K \mid \text{ord}(z) > 0\}.$$

7 Funções de Valorização

Definição 7.1. *Uma função $\phi : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ é uma **valorização discreta** se:*

- (i) $\phi(a) = \infty \iff a = 0$;
- (ii) $\phi(ab) = \phi(a) + \phi(b)$;
- (iii) $\phi(a + b) \geq \min(\phi(a), \phi(b))$.

Observação 7.2. *Dar um DVR com corpo de frações K é equivalente a dar uma função de valorização em K .*

8 Mapas Polinomiais e Mudanças Afins de Coordenadas

8.1 Mapas Polinomiais

Seja

$$T = (T_1, \dots, T_m) : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$$

um **mapa polinomial**, isto é, cada $T_i \in k[X_1, \dots, X_n]$.

Dado um polinômio $F \in k[Y_1, \dots, Y_m]$, definimos o polinômio

$$F^T := F(T_1, \dots, T_m) \in k[X_1, \dots, X_n],$$

que corresponde à substituição das variáveis.

8.2 Pullback de Ideais e Conjuntos Algébricos

Seja $I \subset k[Y_1, \dots, Y_m]$ um ideal. Definimos o ideal

$$I^T := \langle F^T \mid F \in I \rangle \subset k[X_1, \dots, X_n].$$

Se $V \subset \mathbb{A}^m$ é um conjunto algébrico, com $I = I(V)$, definimos

$$V^T := T^{-1}(V) = V(I^T).$$

Caso particular: hipersuperfícies Se $V = V(F)$ é uma hipersuperfície, então

$$V^T = V(F^T),$$

desde que F^T não seja constante.

8.3 Mudanças Afins de Coordenadas

Definição 8.1. Uma *mudança afim de coordenadas* em $\mathbb{A}^n$ é um mapa polinomial

$$T = (T_1, \dots, T_n) : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$$

tal que:

- cada T_i é um polinômio de grau 1;
- T é bijetivo.

Cada T_i pode ser escrito como:

$$T_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + a_{i0}.$$

Assim, podemos decompor:

$$T = T'' \circ T',$$

onde:

- T' é a parte linear:

$$T'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j;$$

- T'' é uma translação:

$$T''_i = X_i + a_{i0}.$$

8.4 Invertibilidade

Como toda translação é invertível, segue que:

- T é bijetivo se, e somente se, T' é invertível;
- isto equivale a dizer que a matriz (a_{ij}) é invertível.

8.5 Propriedades

Se T e U são mudanças afins de coordenadas em $\mathbb{A}^n$, então:

- $T \circ U$ também é uma mudança afim;
- T^{-1} também é uma mudança afim.

Observação 8.2. Mudanças afins de coordenadas são exatamente os automorfismos da variedade afim $\mathbb{A}^n$ dados por transformações lineares invertíveis seguidas de translações.

9 Funções Racionais e Anéis Locais

9.1 Corpo de Funções Racionais

Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim não vazia e $\Gamma(V)$ seu anel de coordenadas.

Como $\Gamma(V)$ é um domínio de integridade, podemos formar seu corpo de frações, denotado por

$$k(V),$$

chamado de **corpo de funções racionais** em V .

Definição 9.1. Um elemento $f \in k(V)$ é chamado de **função racional** em V .

9.2 Pontos de Definição

Se $f \in k(V)$ e $P \in V$, dizemos que f está **definida em** P se existe uma representação

$$f = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \Gamma(V), \quad b(P) \neq 0.$$

Observação 9.2. A representação de f não é única; dizemos que f está definida em P se existe uma representação cujo denominador não se anula em P .

Se $\Gamma(V)$ é um domínio de fatoração única (UFD), então existe uma representação essencialmente única com $\gcd(a, b) = 1$, e nesse caso:

$$f \text{ definida em } P \iff b(P) \neq 0.$$

9.3 Exemplo

Seja

$$V = V(XW - YZ) \subset \mathbb{A}^4.$$

Então

$$\Gamma(V) = k[X, Y, Z, W]/(XW - YZ).$$

Se X, Y, Z, W denotam as classes dos polinômios, temos:

$$\frac{X}{Y} = \frac{Z}{W} \in k(V).$$

Essa função está definida em $P = (x, y, z, w)$ se $y \neq 0$ ou $w \neq 0$.

9.4 Anel Local

Definição 9.3. Para $P \in V$, definimos

$$\mathcal{O}_P(V) := \{f \in k(V) \mid f \text{ está definida em } P\}.$$

- $\mathcal{O}_P(V)$ é um subanel de $k(V)$;
- $k \subset \Gamma(V) \subset \mathcal{O}_P(V) \subset k(V)$.

Definição 9.4. O anel $\mathcal{O}_P(V)$ é chamado de **anel local de V em P** .

9.5 Conjunto de Polos

Definição 9.5. O conjunto de pontos onde $f \in k(V)$ não está definida é chamado de **conjunto de polos** de f .

Proposição 9.6. (1) O conjunto de polos de uma função racional é um subconjunto algébrico de V ;

$$(2) \Gamma(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V).$$

9.6 Avaliação e Ideal Maximal

Se $f \in \mathcal{O}_P(V)$, podemos definir seu valor em P :

$$f(P) := \frac{a(P)}{b(P)}, \quad \text{onde } f = \frac{a}{b}, \quad b(P) \neq 0.$$

Definição 9.7. O **ideal maximal** em P é

$$\mathfrak{m}_P(V) := \{f \in \mathcal{O}_P(V) \mid f(P) = 0\}.$$

Temos:

- $\mathfrak{m}_P(V)$ é o núcleo da aplicação avaliação $f \mapsto f(P)$;
- $\mathcal{O}_P(V)/\mathfrak{m}_P(V) \cong k$;
- f é unidade em $\mathcal{O}_P(V) \iff f(P) \neq 0$.

9.7 Caracterização de Anéis Locais

Lema 1. Para um anel R , são equivalentes:

- (1) o conjunto dos não-unidades forma um ideal;
- (2) R possui um único ideal maximal que contém todos os ideais próprios.

Definição 9.8. Um anel que satisfaz essas condições é chamado de **anel local**.

Observação 9.9. O anel $\mathcal{O}_P(V)$ é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}_P(V)$.

9.8 Importância Geométrica

Os anéis locais capturam propriedades **locais** da variedade em um ponto P , isto é, propriedades que dependem apenas de uma vizinhança infinitesimal de P .

9.9 Propriedade de Noetherianidade

Proposição 9.10. O anel $\mathcal{O}_P(V)$ é um domínio local Noetheriano.

Ideia da prova. Seja $I \subset \mathcal{O}_P(V)$ um ideal. Como $\Gamma(V)$ é Noetheriano, o ideal

$$I \cap \Gamma(V)$$

é gerado por $f_1, \dots, f_r$.

Mostra-se que esses mesmos elementos geram I em $\mathcal{O}_P(V)$ usando o fato de que qualquer $f \in I$ pode ser escrito como $\frac{g}{b}$ com $b(P) \neq 0$. $\square$

10 Mudanças Afins e Anéis Locais

Seja $T : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ uma mudança afim de coordenadas e suponha que

$$T(P) = Q.$$

Denotamos por

$$\tilde{T} : k(\mathbb{A}^n) \rightarrow k(\mathbb{A}^n), \quad f \mapsto f \circ T$$

o homomorfismo induzido (pullback).

10.1 Caso da Variedade Afim $\mathbb{A}^n$

Proposição 10.1. *A aplicação*

$$\tilde{T} : \mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^n) \rightarrow \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$$

é um isomorfismo de anéis locais.

Demonstração. (1) Bem definida

Se $f \in \mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^n)$, então f está definida em Q , ou seja,

$$f = \frac{a}{b}, \quad b(Q) \neq 0.$$

Então

$$\tilde{T}(f) = f \circ T = \frac{a \circ T}{b \circ T}.$$

Como $T(P) = Q$, temos:

$$(b \circ T)(P) = b(Q) \neq 0,$$

logo $\tilde{T}(f) \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$.

(2) Homomorfismo de anéis

Claro que $\tilde{T}$ preserva soma e produto, pois é dada por composição.

(3) Bijetividade

Como T é uma mudança afim, existe T^{-1} . Definimos:

$$\widetilde{T^{-1}} : \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) \rightarrow \mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^n), \quad f \mapsto f \circ T^{-1}.$$

Então:

$$\widetilde{T^{-1}} \circ \tilde{T} = \text{id}, \quad \tilde{T} \circ \widetilde{T^{-1}} = \text{id}.$$

Logo $\tilde{T}$ é um isomorfismo.

(4) Estrutura local

Além disso,

$$f \in \mathfrak{m}_Q \iff f(Q) = 0$$

implica

$$\tilde{T}(f)(P) = f(T(P)) = f(Q),$$

logo $\tilde{T}(\mathfrak{m}_Q) = \mathfrak{m}_P$.

Portanto, $\tilde{T}$ é um isomorfismo de anéis locais. □

10.2 Caso de uma Subvariedade

Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ uma subvariedade e suponha $P \in V^T = T^{-1}(V)$.

Proposição 10.2. *A aplicação $\tilde{T}$ induz um isomorfismo*

$$\tilde{T} : \mathcal{O}_Q(V) \rightarrow \mathcal{O}_P(V^T).$$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{O}_Q(V)$, então existe uma vizinhança onde f é representada por

$$f = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \Gamma(V), \quad b(Q) \neq 0.$$

Então

$$\tilde{T}(f) = f \circ T = \frac{a \circ T}{b \circ T}.$$

Como $T(P) = Q$, segue:

$$(b \circ T)(P) = b(Q) \neq 0,$$

logo $\tilde{T}(f) \in \mathcal{O}_P(V^T)$.

Além disso, como T induz um isomorfismo entre V^T e V , o mesmo argumento do caso afim mostra que $\tilde{T}$ é bijetivo, com inversa dada por $\tilde{T}^{-1}$.

Portanto,

$$\mathcal{O}_Q(V) \cong \mathcal{O}_P(V^T).$$

□

10.3 Interpretação Geométrica

Observação 10.3. *Mudanças afins de coordenadas preservam completamente a estrutura local de uma variedade. Em particular, propriedades locais como:*

- *singularidade,*
- *multiplicidade,*
- *dimensão tangente,*

são invariantes por mudanças afins.

11 sobre Anéis Locais

Proposição 11.1. *Seja $I = (X, Y) \subset k[X, Y]$. Temos que*

$$\dim_k (k[X, Y]/I^n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demonstração. O ideal I^n é gerado por todos os monômios de grau $\geq n$.

Logo, uma base de $k[X, Y]/I^n$ é dada pelos monômios

$$X^i Y^j \quad \text{com } i + j < n.$$

Para cada $d = 0, 1, \dots, n-1$, existem $d+1$ monômios de grau d :

$$1, X, Y, X^2, XY, Y^2, \dots$$

Portanto:

$$\dim_k = \sum_{d=0}^{n-1} (d+1) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

12 Compatibilidade de Anéis Locais com Quocientes

Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade, $I = I(V) \subset k[X_1, \dots, X_n]$, $P \in V$, e $J \subset k[X_1, \dots, X_n]$ um ideal tal que $I \subset J$.

Seja J' a imagem de J em

$$\Gamma(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I.$$

Proposição 12.1. *Existe um homomorfismo natural*

$$\varphi : \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)/J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathcal{O}_P(V)/J'\mathcal{O}_P(V),$$

e φ é um isomorfismo.

Demonstração. (1) Construção do homomorfismo

Temos o homomorfismo canônico:

$$\pi : k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \Gamma(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I.$$

Esse mapa se estende a funções racionais definidas em P , induzindo:

$$\tilde{\pi} : \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathcal{O}_P(V).$$

Explicitamente, se $f = \frac{a}{b}$ com $b(P) \neq 0$, então:

$$\tilde{\pi}(f) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}},$$

onde $\bar{a}, \bar{b}$ são as classes em $\Gamma(V)$.

(2) Compatibilidade com J

Se $a \in J$, então $\bar{a} \in J'$, logo:

$$\tilde{\pi}(J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)) \subset J'\mathcal{O}_P(V).$$

Assim, $\tilde{\pi}$ induz um homomorfismo:

$$\varphi : \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)/J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathcal{O}_P(V)/J'\mathcal{O}_P(V).$$

(3) Sobrejetividade

Qualquer elemento de $\mathcal{O}_P(V)$ pode ser escrito como $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, com $b(P) \neq 0$, onde $a, b \in k[X_1, \dots, X_n]$.

Logo esse elemento é imagem de $\frac{a}{b} \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$, portanto φ é sobrejetiva.

(4) Injetividade

Se $f \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$ pertence ao núcleo de φ , então $\tilde{\pi}(f) \in J'\mathcal{O}_P(V)$.

Isso significa que, módulo I , f pertence a J , isto é, $f \in J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$.

Logo o núcleo de φ é exatamente $J\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)$, e φ é injetiva.

Portanto, φ é um isomorfismo. □

Corolário 1. *Tomando $J = I$, obtemos:*

$$\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)/I\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n) \cong \mathcal{O}_P(V).$$

12.1 Interpretação Geométrica

Observação 12.2. *Este resultado mostra que o anel local de V em P pode ser obtido a partir do anel local de $\mathbb{A}^n$ simplesmente impondo as equações definidoras de V .*

Ou seja, a passagem ao anel local comuta com a passagem ao quociente.

13 Ideais com Número Finito de Zeros

O objetivo desta seção é relacionar propriedades globais (anel de coordenadas) com propriedades locais (anéis locais).

Proposição 13.1. *Seja $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ um ideal, com k algebricamente fechado, e suponha*

$$V(I) = \{P_1, \dots, P_N\}.$$

Seja $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{P_i}(\mathbb{A}^n)$. Então existe um isomorfismo natural:

$$k[X_1, \dots, X_n]/I \cong \prod_{i=1}^N \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i.$$

Demonstração. Seja $I_i = I(\{P_i\})$ o ideal maximal correspondente a P_i . Então:

$$\text{Rad}(I) = I(\{P_1, \dots, P_N\}) = \bigcap_{i=1}^N I_i.$$

Pelo Nullstellensatz, existe d tal que:

$$\left(\bigcap_{i=1}^N I_i \right)^d \subset I.$$

Definimos:

$$R = k[X_1, \dots, X_n]/I, \quad R_i = \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i.$$

Os homomorfismos naturais induzem:

$$\varphi : R \longrightarrow \prod_{i=1}^N R_i.$$

Construção de idempotentes

Escolhemos polinômios F_i tais que:

$$F_i(P_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Definimos:

$$E_i = 1 - (1 - F_i^d)^d.$$

Então:

- $E_i \in I_j^d$ para $j \neq i$;

- $1 - \sum E_i \in I$;
- $E_i^2 - E_i \in I$.

Seja e_i a classe de E_i em R . Então:

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_j = 0 \ (i \neq j), \quad \sum e_i = 1.$$

Passo chave

Se $G(P_i) \neq 0$, então existe $t \in R$ tal que:

$$tg = e_i,$$

onde g é a classe de G em R .

Injetividade

Se $\varphi(f) = 0$, então para cada i existe G_i com $G_i(P_i) \neq 0$ tal que

$$G_i f \in I.$$

Usando os e_i , obtemos:

$$f = \sum e_i f = 0.$$

Sobrejetividade

Seja

$$z = \left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_N}{s_N} \right) \in \prod R_i.$$

Usando o passo chave, escolhemos t_i com $t_i s_i = e_i$. Então:

$$\varphi \left(\sum t_i a_i e_i \right) = z.$$

Logo φ é um isomorfismo. □

13.1 Corolários

Corolário 2.

$$\dim_k (k[X_1, \dots, X_n]/I) = \sum_{i=1}^N \dim_k (\mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}).$$

Corolário 3. Se $V(I) = \{P\}$, então:

$$k[X_1, \dots, X_n]/I \cong \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n)/I\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^n).$$

13.2 Interpretação Geométrica

Observação 13.2. Este resultado mostra que um ideal com número finito de zeros decompõe-se como um **produto de contribuições locais**.

Cada fator $\mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}$ mede a “multiplicidade” de I no ponto P_i .

Isso é uma forma concreta de decomposição local-global em geometria algébrica.

14 DVR e Filtração pelo Ideal Maximal

Seja R um anel de valorização discreta (DVR), com ideal maximal $\mathfrak{m} = (t)$, corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$, e função ordem ord .

14.1 (a) Dimensão de $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$

Proposição 14.1. *Para todo $n \geq 0$,*

$$\dim_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = 1.$$

Demonstração. Como R é um DVR, temos $\mathfrak{m} = (t)$, logo:

$$\mathfrak{m}^n = (t^n), \quad \mathfrak{m}^{n+1} = (t^{n+1}).$$

Então:

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong (t^n)/(t^{n+1}).$$

Qualquer elemento pode ser escrito como:

$$at^n \pmod{t^{n+1}}, \quad a \in R.$$

Definimos:

$$\phi : R \rightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}, \quad a \mapsto at^n.$$

O núcleo é $\mathfrak{m}$, logo:

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong R/\mathfrak{m} = k.$$

Portanto, a dimensão sobre k é 1. □

14.2 (b) Dimensão de $R/\mathfrak{m}^n$

Proposição 14.2. *Para todo $n \geq 0$,*

$$\dim_k(R/\mathfrak{m}^n) = n.$$

Demonstração. Temos uma filtragem:

$$R \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}^n.$$

Isto induz uma decomposição em soma direta de espaços vetoriais:

$$R/\mathfrak{m}^n \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}.$$

Pelo item (a), cada quociente tem dimensão 1. Logo:

$$\dim_k(R/\mathfrak{m}^n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n.$$

□

14.3 (c) Ordem e dimensão

Proposição 14.3. *Se $z \in R$, então:*

$$\text{ord}(z) = n \iff (z) = \mathfrak{m}^n,$$

e conseqüentemente:

$$\text{ord}(z) = \dim_k(R/(z)).$$

Demonstração. Como R é um DVR, todo elemento $z \neq 0$ pode ser escrito como:

$$z = ut^n,$$

onde u é unidade e $n = \text{ord}(z)$.

Logo:

$$(z) = (ut^n) = (t^n) = \mathfrak{m}^n.$$

Isso mostra:

$$\text{ord}(z) = n \iff (z) = \mathfrak{m}^n.$$

Então:

$$R/(z) \cong R/\mathfrak{m}^n.$$

Pelo item (b):

$$\dim_k(R/(z)) = n = \text{ord}(z).$$

□

14.4 Interpretação

Observação 14.4. *Este resultado mostra que, em um DVR, a ordem de um elemento mede exatamente o “tamanho” do quociente $R/(z)$ como espaço vetorial sobre o corpo residual.*

Geometricamente, isso corresponde à multiplicidade local.

15 Multiplicidade e Anéis Locais

Seja $F \subset \mathbb{A}^2$ uma curva plana irreduzível e $P \in F$.

Denotamos por

$$\Gamma(F) = k[X, Y]/(F)$$

o anel de coordenadas, e por $\mathcal{O}_P(F)$ o anel local em P . Para $G \in k[X, Y]$, denotamos por g sua imagem em $\Gamma(F)$.

15.1 Teorema 1: Pontos simples e DVR

Teorema 15.1. *O ponto P é simples em F se, e somente se, $\mathcal{O}_P(F)$ é um DVR.*

Nesse caso, se $L = aX + bY + c$ é uma reta passando por P que não é tangente a F em P , então sua imagem l em $\mathcal{O}_P(F)$ é um parâmetro uniformizante.

Demonstração. Suponha que P é simples.

Por uma mudança afim de coordenadas, podemos assumir:

$$P = (0, 0), \quad \text{reta tangente} = Y, \quad L = X.$$

Queremos mostrar que o ideal maximal é principal:

$$\mathfrak{m}_P(F) = (x).$$

Sabemos que:

$$\mathfrak{m}_P(F) = (x, y).$$

Como P é simples, podemos escrever:

$$F = Y + \text{termos de grau maior.}$$

Reorganizando:

$$F = YG - X^2H,$$

onde $G = 1 + \text{termos de ordem superior}$ e $H \in k[X]$.

No anel $\Gamma(F)$:

$$yg = x^2h.$$

Como $g(P) \neq 0$, g é unidade em $\mathcal{O}_P(F)$, então:

$$y = x^2hg^{-1} \in (x).$$

Logo:

$$\mathfrak{m}_P(F) = (x, y) = (x).$$

Portanto, $\mathcal{O}_P(F)$ é um DVR, com parâmetro uniformizante x .

A recíproca segue do Teorema 2. □

15.2 Função ordem

Se P é simples, o DVR $\mathcal{O}_P(F)$ define uma função ordem:

$$\text{ord}_P : k(F)^\times \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Para $G \in k[X, Y]$, escrevemos:

$$\text{ord}_P(G) := \text{ord}_P(g).$$

Proposição 15.2. *Se L é uma reta passando por P , então:*

- $\text{ord}_P(L) = 1$ se L não é tangente;
- $\text{ord}_P(L) \geq 2$ se L é tangente.

Demonstração. Nas coordenadas acima, Y é tangente e satisfaz:

$$y = x^2hg^{-1}.$$

Logo:

$$\text{ord}_P(y) \geq 2.$$

□

15.3 Teorema 2: Multiplicidade via anel local

Teorema 15.3. *Seja $P \in F$. Então, para n suficientemente grande:*

$$m_P(F) = \dim_k (\mathfrak{m}_P(F)^n / \mathfrak{m}_P(F)^{n+1}).$$

Em particular, a multiplicidade depende apenas do anel local $\mathcal{O}_P(F)$.

Demonstração. Denotemos:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(F), \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P(F).$$

Da sequência exata:

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O} / \mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O} / \mathfrak{m}^n \rightarrow 0,$$

basta mostrar que:

$$\dim_k(\mathcal{O} / \mathfrak{m}^n) = n m_P(F) + s$$

para n grande.

Podemos assumir $P = (0, 0)$. Então:

$$\mathfrak{m}^n = I^n \mathcal{O}, \quad I = (X, Y).$$

Usando resultados anteriores:

$$\mathcal{O} / \mathfrak{m}^n \cong k[X, Y] / (I^n, F).$$

Seja $m = m_P(F)$. Então:

$$F \in I^m \setminus I^{m+1}.$$

Multiplicar por F define:

$$\psi : k[X, Y] / I^{n-m} \rightarrow k[X, Y] / I^n.$$

Temos uma sequência exata:

$$0 \rightarrow k[X, Y] / I^{n-m} \rightarrow k[X, Y] / I^n \rightarrow k[X, Y] / (I^n, F) \rightarrow 0.$$

Logo:

$$\dim_k k[X, Y] / (I^n, F) = \dim_k k[X, Y] / I^n - \dim_k k[X, Y] / I^{n-m}.$$

Pelo Exercício 2.46:

$$\dim_k k[X, Y] / I^n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Portanto:

$$\dim_k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} = nm - \frac{m(m-1)}{2}.$$

Logo cresce linearmente com coeficiente m , e concluímos:

$$\dim_k(\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}) = m.$$

□

15.4 Interpretação

Observação 15.4. *Este resultado é fundamental:*

- a multiplicidade é uma propriedade puramente local;
- pode ser lida do crescimento de $\dim_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$;
- para pontos simples ($m = 1$), recuperamos o caso DVR.

Isto conecta:

$$\text{geometria (multiplicidade)} \longleftrightarrow \text{álgebra (anel local)}.$$

O anel local em um ponto de uma curva

Proposição 15.5. *Seja P um ponto de uma curva plana V , e seja $\mathfrak{m}$ o ideal maximal correspondente em $k[V]$. Se P é não singular, então*

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1,$$

e, caso contrário,

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2.$$

Demonstração. Suponha primeiro que $P = (0, 0)$. Então $\mathfrak{m} = (x, y)$ em

$$k[V] = k[X, Y]/(F(X, Y)) = k[x, y].$$

Note que

$$\mathfrak{m}^2 = (x^2, xy, y^2),$$

e

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (X, Y)/(\mathfrak{m}^2 + F(X, Y)) = (X, Y)/(X^2, XY, Y^2, F(X, Y)).$$

Neste quociente, todo elemento é representado por um polinômio linear da forma $cx + dy$, e a única relação é dada por $F_\ell(x, y) = 0$, onde F_ℓ é a parte linear de F .

Claramente,

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1 \quad \text{se } F_\ell \neq 0,$$

e

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2 \quad \text{caso contrário.}$$

Como $F_\ell = 0$ é a equação do espaço tangente, isso prova a proposição neste caso.

O mesmo argumento vale para um ponto arbitrário (a, b) , utilizando as variáveis

$$X' = X - a \quad \text{e} \quad Y' = Y - b,$$

ou seja, efetuando uma translação que leva o ponto à origem. □

Agora explicamos o significado da condição $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ para o anel local $\mathcal{O}_P = k[V]_\mathfrak{m}$.

Seja $\mathfrak{n}$ o ideal maximal de $\mathcal{O}_P$, isto é,

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cdot k[V]_\mathfrak{m}.$$

A aplicação natural $\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$ induz um isomorfismo

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2.$$

Portanto, temos as equivalências:

$$P \text{ não singular} \iff \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1 \iff \dim_k(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = 1.$$

Pelo Lema de Nakayama, essa última condição é equivalente a $\mathfrak{n}$ ser um ideal principal.

Como $\mathcal{O}_P$ tem dimensão de Krull igual a 1, o fato de seu ideal maximal ser principal implica que $\mathcal{O}_P$ é um anel local regular de dimensão 1.

Concluimos, assim, que para um ponto P em uma curva:

$$P \text{ é não singular} \iff \mathcal{O}_P \text{ é regular.}$$

Exemplo: espaço tangente e cone tangente

Considere a curva plana

$$C = V(F), \quad F(x, y) = y^2 - x^2 - x^3,$$

e o ponto $\mathbf{a} = (0, 0)$.

1. Verificação de singularidade:

Calculamos as derivadas parciais:

$$F_x = -2x - 3x^2, \quad F_y = 2y.$$

Avaliando em $(0, 0)$:

$$F_x(0, 0) = 0, \quad F_y(0, 0) = 0.$$

Logo, $(0, 0)$ é um ponto singular.

2. Espaço tangente (definição usual):

A equação do espaço tangente é

$$F_x(0, 0)(X - 0) + F_y(0, 0)(Y - 0) = 0,$$

ou seja,

$$0 = 0.$$

Portanto,

$$T_{(0,0)}(C) = \mathbb{A}^2, \quad \text{e} \quad \dim T_{(0,0)}(C) = 2.$$

3. Cone tangente:

Para obter informação geométrica mais refinada, consideramos a parte homogênea de menor grau de F .

Temos

$$F(x, y) = \underbrace{(y^2 - x^2)}_{\text{grau 2}} - x^3.$$

A parte inicial (de menor grau) é

$$F_2(x, y) = y^2 - x^2.$$

O *cone tangente* é então definido por

$$C_{(0,0)}(C) = V(y^2 - x^2).$$

Fatorando:

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x),$$

logo o cone tangente é a união de duas retas:

$$y = x \quad \text{e} \quad y = -x.$$

4. Conclusão:

- O espaço tangente tem dimensão 2 (porque o ponto é singular).
- O cone tangente é a união de duas retas distintas.
- Geometricamente, a curva tem um ponto duplo com duas direções tangentes.

Exemplo: uma parametrização de curva que não é isomorfismo

Considere a curva

$$C = V(Y^2 - X^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2,$$

e a aplicação regular

$$\varphi : \mathbb{A}^1 \rightarrow C, \quad t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

1. Verificação de que φ toma valores em C :

Seja $x = t^2 - 1$ e $y = t(t^2 - 1)$. Então

$$y^2 = t^2(t^2 - 1)^2,$$

e

$$x^2 + x^3 = (t^2 - 1)^2 + (t^2 - 1)^3 = (t^2 - 1)^2(1 + t^2 - 1) = t^2(t^2 - 1)^2.$$

Logo,

$$y^2 = x^2 + x^3,$$

e portanto $\varphi(t) \in C$.

2. Injetividade:

Suponha que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Então

$$t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2,$$

logo $t_2 = \pm t_1$.

Se $t_2 = -t_1$, então

$$y_1 = t_1(t_1^2 - 1), \quad y_2 = -t_1(t_1^2 - 1).$$

Portanto, $y_1 = y_2$ implica

$$t_1(t_1^2 - 1) = 0,$$

ou seja, $t_1 = 0$ ou $t_1 = \pm 1$.

Assim, φ não é injetiva: por exemplo,

$$\varphi(1) = \varphi(-1) = (0, 0).$$

3. Conclusão:

Como φ não é injetiva, ela não admite inversa regular. Logo,

$$\varphi : \mathbb{A}^1 \rightarrow C$$

não é um isomorfismo.

Observação:

A curva C possui um ponto singular em $(0, 0)$, e a aplicação φ é uma parametrização que “identifica” dois pontos distintos de $\mathbb{A}^1$ nesse ponto singular. Isso mostra que C não é isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

Espaços tangentes a subconjuntos algébricos de $\mathbb{A}^m$

Antes de definir os espaços tangentes em pontos de um subconjunto algébrico de $\mathbb{A}^m$, revisamos alguma terminologia de álgebra linear.

Álgebra linear

Seja k^m um espaço vetorial. Denotamos por X_i a i -ésima função coordenada

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \mapsto a_i.$$

Assim, $X_1, \dots, X_m$ formam a base dual da base padrão de k^m . Uma forma linear

$$\sum a_i X_i$$

pode ser vista como um elemento do espaço dual

$$(k^m)^\vee = \text{Hom}_k(k^m, k).$$

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times m$. Ela define uma aplicação linear

$$\alpha : k^m \rightarrow k^n,$$

dada por

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} a_j \end{pmatrix}.$$

Se $Y_1, \dots, Y_n$ são as funções coordenadas em k^n , então

$$Y_i \circ \alpha = \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j.$$

Espaços tangentes

Definição 15.6. *Seja $V \subset k^m$ um subconjunto algébrico e seja $\mathbf{a} = I(V)$. O espaço tangente $T_{\mathbf{a}}(V)$ de V em um ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in V$ é o subespaço do espaço vetorial com origem em $\mathbf{a}$ definido pelas equações lineares*

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X_i}(\mathbf{a})(X_i - a_i) = 0, \quad F \in \mathbf{a}.$$

Ou seja, $T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m)$ é o espaço vetorial de dimensão m com origem em $\mathbf{a}$, e $T_{\mathbf{a}}(V)$ é o subespaço definido pelas equações acima.

Escrevemos $(dX_i)_{\mathbf{a}}$ para $(X_i - a_i)$. Então $(dX_i)_{\mathbf{a}}$ formam uma base do espaço dual $T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m)^\vee$.

Definimos o diferencial de um polinômio $F \in k[X_1, \dots, X_m]$ em $\mathbf{a}$ por

$$(dF)_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X_i}(\mathbf{a})(dX_i)_{\mathbf{a}}.$$

Em termos de diferenciais, o espaço tangente é definido por

$$(dF)_{\mathbf{a}} = 0, \quad F \in \mathfrak{a}.$$

Afirmção: basta considerar F em um conjunto gerador de $\mathfrak{a}$.

De fato, se $G = \sum_j H_j F_j$, então pela regra do produto,

$$(dG)_{\mathbf{a}} = \sum_j H_j(\mathbf{a})(dF_j)_{\mathbf{a}} + F_j(\mathbf{a})(dH_j)_{\mathbf{a}}.$$

Como $\mathbf{a} \in V$, temos $F_j(\mathbf{a}) = 0$, logo

$$(dG)_{\mathbf{a}} = \sum_j H_j(\mathbf{a})(dF_j)_{\mathbf{a}}.$$

Assim, $(dF_1)_{\mathbf{a}}, \dots, (dF_r)_{\mathbf{a}}$ geram o espaço vetorial

$$\{(dF)_{\mathbf{a}} \mid F \in \mathfrak{a}\}.$$

Definição 15.7. Um ponto $\mathbf{a}$ de um conjunto algébrico V é não singular (ou suave) se ele pertence a uma única componente irredutível W de V e

$$\dim T_{\mathbf{a}}(V) = \dim W.$$

Caso contrário, ele é singular.

Em particular, se V é irredutível,

$$\mathbf{a} \text{ é não singular} \iff \dim T_{\mathbf{a}}(V) = \dim V.$$

Se $\mathfrak{a} = (F_1, \dots, F_r)$, definimos a matriz Jacobiana

$$J = \text{Jac}(F_1, \dots, F_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial X_m} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = m - \text{rank } J(\mathbf{a}),$$

e portanto $\mathbf{a}$ é não singular se, e somente se,

$$\text{rank } J(\mathbf{a}) = m - \dim V.$$

Exemplo (hipersuperfície): se V é definida por um único polinômio F , então

$$J(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial X_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial F}{\partial X_m}(\mathbf{a}) \right),$$

e $\mathbf{a}$ é não singular se, e somente se, nem todas as derivadas parciais se anulam em $\mathbf{a}$.

A matriz Jacobiana pode ser vista como uma matriz de funções regulares em V . Para cada r , o conjunto

$$\{\mathbf{a} \in V \mid \text{rank } J(\mathbf{a}) \leq r\}$$

é fechado em V , pois é definido pelo anulamento de determinantes.

Portanto, existe um aberto $U \subset V$ onde o posto de $J(\mathbf{a})$ atinge seu valor máximo. Posteriormente mostra-se que esse valor máximo é $m - \dim V$, e assim os pontos não singulares formam um subconjunto aberto não vazio de V .

Curvas: dimensão do espaço tangente em pontos suaves

Proposição 15.8. *Seja $V \subset \mathbb{A}^m$ uma curva algébrica (isto é, $\dim V = 1$) e seja $\mathbf{a} \in V$. Se $\mathbf{a}$ é um ponto não singular (suave), então*

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = 1.$$

Demonstração. Pela definição geral, um ponto $\mathbf{a} \in V$ é não singular se, e somente se,

$$\dim T_{\mathbf{a}}(V) = \dim V.$$

Como V é uma curva, temos $\dim V = 1$. Logo, se $\mathbf{a}$ é não singular,

$$\dim T_{\mathbf{a}}(V) = 1.$$

Podemos também ver isso explicitamente usando a matriz Jacobiana. Suponha que

$$I(V) = (F_1, \dots, F_r),$$

e seja $J(\mathbf{a})$ a matriz Jacobiana avaliada em $\mathbf{a}$. Então

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = m - \text{rank } J(\mathbf{a}).$$

Como $\mathbf{a}$ é não singular, temos

$$\text{rank } J(\mathbf{a}) = m - \dim V = m - 1.$$

Substituindo,

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = m - (m - 1) = 1.$$

Portanto, o espaço tangente em um ponto suave de uma curva é uma reta (espaço vetorial de dimensão 1). $\square$

Curvas planas: dimensão do espaço tangente em pontos suaves

Proposição 15.9. *Seja $V \subset \mathbb{A}^2$ uma curva plana definida por*

$$V = V(F), \quad F \in k[X, Y].$$

Seja $\mathbf{a} = (a, b) \in V$. Então $\mathbf{a}$ é não singular se, e somente se,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}(\mathbf{a}), \frac{\partial F}{\partial Y}(\mathbf{a}) \right) \neq (0, 0),$$

e, nesse caso,

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = 1.$$

Demonstração. O espaço tangente $T_{\mathbf{a}}(V)$ é definido pela equação linear

$$\frac{\partial F}{\partial X}(\mathbf{a})(X - a) + \frac{\partial F}{\partial Y}(\mathbf{a})(Y - b) = 0.$$

Este é um subespaço de $T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^2)$, que é um espaço vetorial de dimensão 2 com coordenadas $(X - a, Y - b)$.

Se $(\frac{\partial F}{\partial X}(\mathbf{a}), \frac{\partial F}{\partial Y}(\mathbf{a})) \neq (0, 0)$, então a equação acima é uma equação linear não trivial. Logo, ela define um subespaço de dimensão 1 de k^2 .

Portanto,

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = 1.$$

Por outro lado, se

$$\frac{\partial F}{\partial X}(\mathbf{a}) = \frac{\partial F}{\partial Y}(\mathbf{a}) = 0,$$

então a equação tangente se torna

$$0 = 0,$$

ou seja, não impõe nenhuma restrição. Assim,

$$T_{\mathbf{a}}(V) = T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^2),$$

e portanto

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = 2.$$

Concluimos que $\mathbf{a}$ é não singular se, e somente se, o gradiente de F não se anula em $\mathbf{a}$, e nesse caso o espaço tangente tem dimensão 1. $\square$

Espaço tangente a uma hipersuperfície

Seja $V \subset \mathbb{A}^m$ uma hipersuperfície definida por um polinômio

$$V = V(F), \quad F \in k[X_1, \dots, X_m],$$

e seja $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in V$.

Proposição 15.10. *O espaço tangente $T_{\mathbf{a}}(V)$ é o subespaço de $T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m)$ definido pela equação linear*

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X_i}(\mathbf{a})(X_i - a_i) = 0.$$

Demonstração. Pela definição geral, o espaço tangente é dado pelas equações

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial G}{\partial X_i}(\mathbf{a})(X_i - a_i) = 0, \quad G \in I(V).$$

Como $I(V) = (F)$, basta considerar $G = H \cdot F$. Pela regra do produto,

$$(dG)_{\mathbf{a}} = H(\mathbf{a})(dF)_{\mathbf{a}} + F(\mathbf{a})(dH)_{\mathbf{a}}.$$

Como $\mathbf{a} \in V$, temos $F(\mathbf{a}) = 0$, logo

$$(dG)_{\mathbf{a}} = H(\mathbf{a})(dF)_{\mathbf{a}}.$$

Portanto, todas as equações tangentes são múltiplas da equação obtida de F , o que mostra que $T_{\mathbf{a}}(V)$ é definido por

$$(dF)_{\mathbf{a}} = 0,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X_i}(\mathbf{a})(X_i - a_i) = 0.$$

$\square$

Proposição 15.11. *Se $\mathbf{a} \in V$, então:*

- $\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = m - 1$ se $\nabla F(\mathbf{a}) \neq 0$;
- $\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = m$ se $\nabla F(\mathbf{a}) = 0$.

Em particular, $\mathbf{a}$ é não singular se, e somente se,

$$\nabla F(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Demonstração. O espaço $T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m)$ tem dimensão m . A equação

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X_i}(\mathbf{a})(X_i - a_i) = 0$$

é linear.

Se $\nabla F(\mathbf{a}) \neq 0$, esta é uma equação linear não trivial, e portanto define um subespaço de dimensão $m - 1$.

Se $\nabla F(\mathbf{a}) = 0$, a equação se reduz a $0 = 0$, e não impõe restrições. Logo,

$$T_{\mathbf{a}}(V) = T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m),$$

e sua dimensão é m . □

Critério Jacobiano de não singularidade

Seja $V \subset \mathbb{A}^m$ um conjunto algébrico irredutível.

Proposição 15.12. *Um ponto $\mathbf{a} \in V$ é não singular se, e somente se,*

$$\dim T_{\mathbf{a}}(V) = \dim V.$$

Além disso, um ponto $\mathbf{a}$ de um conjunto algébrico V é não singular se, e somente se, ele pertence a uma única componente irredutível de V e é não singular nessa componente.

Seja $\mathfrak{a} = (F_1, \dots, F_r)$ o ideal de V , e seja a matriz Jacobiana

$$J = \text{Jac}(F_1, \dots, F_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial X_m} \end{pmatrix}.$$

As equações que definem $T_{\mathbf{a}}(V)$ como subespaço de $T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m)$ têm matriz $J(\mathbf{a})$. Portanto, pela álgebra linear,

$$\dim_k T_{\mathbf{a}}(V) = m - \text{rank } J(\mathbf{a}).$$

Segue que $\mathbf{a}$ é não singular se, e somente se,

$$\text{rank } J(\mathbf{a}) = m - \dim V.$$

Exemplo (hipersuperfície): Se $V = V(F)$, então

$$J(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial X_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial F}{\partial X_m}(\mathbf{a}) \right),$$

e $\mathbf{a}$ é não singular se, e somente se, nem todas as derivadas parciais se anulam em $\mathbf{a}$.

Podemos ver J como uma matriz de funções regulares em V . Para cada inteiro r , o conjunto

$$\{\mathbf{a} \in V \mid \text{rank } J(\mathbf{a}) \leq r\}$$

é fechado em V , pois é definido pelo anulamento de menores (determinantes).

Portanto, existe um aberto $U \subset V$ no qual o posto de $J(\mathbf{a})$ atinge seu valor máximo, e o posto diminui apenas em subconjuntos fechados.

Posteriormente, mostra-se que o valor máximo de $\text{rank } J(\mathbf{a})$ é $m - \dim V$. Consequentemente, os pontos não singulares de V formam um subconjunto aberto não vazio de V .

O diferencial de uma aplicação regular

Considere uma aplicação regular

$$\varphi : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n, \quad \mathbf{a} \mapsto (P_1(\mathbf{a}), \dots, P_n(\mathbf{a})).$$

Podemos escrevê-la como

$$Y_i = P_i(X_1, \dots, X_m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ela corresponde ao homomorfismo de anéis

$$\varphi^* : k[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_m], \quad Y_i \mapsto P_i(X_1, \dots, X_m).$$

Seja $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^m$ e $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$. Definimos o diferencial

$$(d\varphi)_{\mathbf{a}} : T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m) \rightarrow T_{\mathbf{b}}(\mathbb{A}^n)$$

como a aplicação linear tal que

$$(dY_i)_{\mathbf{b}} \circ (d\varphi)_{\mathbf{a}} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_i}{\partial X_j}(\mathbf{a})(dX_j)_{\mathbf{a}}.$$

Isto é, relativamente às bases padrão, $(d\varphi)_{\mathbf{a}}$ é dada pela matriz Jacobiana

$$\text{Jac}(P_1, \dots, P_n)(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial X_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial X_m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial X_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial X_m}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Se $F \in k[X_1, \dots, X_m]$, podemos vê-lo como uma aplicação

$$F : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^1.$$

Seu diferencial coincide com o diferencial já definido anteriormente:

$$(dF)_{\mathbf{a}} : T_{\mathbf{a}}(\mathbb{A}^m) \rightarrow k.$$

Lema 2. Se $\varphi : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ é uma aplicação regular que envia $V = V(\mathbf{a})$ em $W = V(\mathbf{b})$, então

$$(d\varphi)_{\mathbf{a}}(T_{\mathbf{a}}(V)) \subset T_{\mathbf{b}}(W), \quad \mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a}).$$

Demonstração. Se $f \in \mathfrak{b}$, então $f \circ \varphi \in \mathfrak{a}$.

Pela regra da cadeia,

$$d(f \circ \varphi)_{\mathbf{a}} = (df)_{\mathbf{b}} \circ (d\varphi)_{\mathbf{a}}.$$

Se $\mathbf{t} \in T_{\mathbf{a}}(V)$, então

$$d(f \circ \varphi)_{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = 0,$$

pois $f \circ \varphi \in \mathfrak{a}$.

Logo,

$$(df)_{\mathbf{b}}((d\varphi)_{\mathbf{a}}(\mathbf{t})) = 0,$$

isto é,

$$(d\varphi)_{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) \in T_{\mathbf{b}}(W).$$

□

Além disso, vale a regra da cadeia:

$$(d\psi)_{\mathbf{b}} \circ (d\varphi)_{\mathbf{a}} = d(\psi \circ \varphi)_{\mathbf{a}}.$$

Exemplo explícito: aplicação entre curvas planas e o diferencial

Considere as curvas planas

$$C = V(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2, \quad D = V(v - u^3) \subset \mathbb{A}^2.$$

Definimos uma aplicação regular

$$\varphi : C \rightarrow D, \quad (x, y) \mapsto (u, v) = (x, xy).$$

Primeiro verificamos que $\varphi(C) \subset D$. De fato, se $(x, y) \in C$, então $y = x^2$, logo

$$v = xy = x \cdot x^2 = x^3 = u^3,$$

portanto $\varphi(x, y) \in D$.

Seja $\mathbf{a} = (a, a^2) \in C$ e $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a}) = (a, a^3)$.

Espaço tangente em C :

A equação de C é $F(x, y) = y - x^2$, então

$$F_x = -2x, \quad F_y = 1.$$

Logo, o espaço tangente em $\mathbf{a}$ é dado por

$$-2a(X - a) + (Y - a^2) = 0,$$

ou, em coordenadas vetoriais (t_1, t_2) ,

$$-2at_1 + t_2 = 0.$$

Portanto,

$$T_{\mathbf{a}}(C) = \{(t_1, t_2) \in k^2 \mid t_2 = 2at_1\}.$$

Espaço tangente em D :

A equação de D é $G(u, v) = v - u^3$, então

$$G_u = -3u^2, \quad G_v = 1.$$

Logo, em $\mathbf{b} = (a, a^3)$,

$$-3a^2(U - a) + (V - a^3) = 0,$$

ou

$$-3a^2 s_1 + s_2 = 0.$$

Assim,

$$T_{\mathbf{b}}(D) = \{(s_1, s_2) \in k^2 \mid s_2 = 3a^2 s_1\}.$$

Diferencial da aplicação:

A aplicação é dada por

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = xy.$$

A matriz Jacobiana é

$$J(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}_{(x,y)=(a,a^2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & a \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$(d\varphi)_{\mathbf{a}}(t_1, t_2) = (t_1, a^2 t_1 + at_2).$$

Restrição ao espaço tangente:

Se $(t_1, t_2) \in T_{\mathbf{a}}(C)$, então $t_2 = 2at_1$. Substituindo,

$$(d\varphi)_{\mathbf{a}}(t_1, t_2) = (t_1, a^2 t_1 + a(2at_1)) = (t_1, 3a^2 t_1).$$

Portanto,

$$(d\varphi)_{\mathbf{a}}(t_1, t_2) \in T_{\mathbf{b}}(D),$$

pois satisfaz

$$s_2 = 3a^2 s_1.$$

Concluimos que

$$(d\varphi)_{\mathbf{a}} : T_{\mathbf{a}}(C) \rightarrow T_{\mathbf{b}}(D)$$

é dado por

$$t_1 \mapsto (t_1, 3a^2 t_1),$$

isto é, uma aplicação linear entre espaços tangentes (retas).