

Espaço Tangente Algébrico

1 Espaço tangente a variedades afins

A definição clássica do espaço tangente utiliza uma imersão da variedade em $\mathbb{A}^n$. Nesta seção, apresentamos uma definição intrínseca, que depende apenas do anel local no ponto.

1.1 Pontos com valores em um anel

Seja V uma variedade algébrica afim sobre um corpo k , e seja R uma k -álgebra. Definimos

$$V(R) := \text{Hom}_k(k[V], R),$$

o conjunto dos homomorfismos de k -álgebras.

Se $V \subset \mathbb{A}^n$, então podemos identificar:

$$V(R) = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in I(V)\}.$$

Um homomorfismo de k -álgebras $R \rightarrow S$ induz uma aplicação

$$V(R) \rightarrow V(S).$$

1.2 Números duais

Definimos o anel dos números duais por

$$k[\varepsilon] := k[X]/(X^2),$$

onde $\varepsilon = X \pmod{(X^2)}$.

Como espaço vetorial,

$$k[\varepsilon] = k \oplus k\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0,$$

e a multiplicação é dada por

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon.$$

Existe um homomorfismo natural

$$k[\varepsilon] \rightarrow k, \quad \varepsilon \mapsto 0.$$

1.3 Definição do espaço tangente

Definição 1.1. *Seja $P \in V$. O espaço tangente de V em P é*

$$T_P(V) := \{P' \in V(k[\varepsilon]) \mid P' \mapsto P\}.$$

Equivalentemente, $T_P(V)$ é o conjunto dos homomorfismos de k -álgebras

$$\alpha : k[V] \rightarrow k[\varepsilon]$$

tais que a composição

$$k[V] \xrightarrow{\alpha} k[\varepsilon] \rightarrow k$$

corresponde ao ponto P .

Isso equivale a dizer que

$$\alpha^{-1}((\varepsilon)) = \mathfrak{m}_P,$$

onde $\mathfrak{m}_P$ é o ideal maximal correspondente ao ponto P .

1.4 Comparação com a definição clássica

Proposição 1.2. *Se $V \subset \mathbb{A}^n$ é um conjunto algébrico e $P \in V$, então a definição intrínseca do espaço tangente coincide com a definição clássica via derivadas parciais.*

Ideia da demonstração:

Se $P = (a_1, \dots, a_n)$ e $F \in I(V)$, escrevemos o desenvolvimento de Taylor:

$$F(X) = F(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(a)(X_i - a_i) + R,$$

onde R contém termos de ordem ≥ 2 .

Substituindo $X_i = a_i + \varepsilon b_i$, obtemos:

$$F(a_1 + \varepsilon b_1, \dots, a_n + \varepsilon b_n) = \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(a)b_i.$$

Logo, $(a + \varepsilon b) \in V(k[\varepsilon])$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(a)b_i = 0,$$

isto é, $b \in T_P(V)$ na definição clássica.

1.5 Descrição via o anel local

Proposição 1.3. *Seja V uma variedade afim e $P \in V$. Existe um isomorfismo canônico:*

$$T_P(V) \cong \text{Hom}_{\text{loc}}(\mathcal{O}_{V,P}, k[\varepsilon]),$$

onde os homomorfismos são locais.

Demonstração. Um elemento de $T_P(V)$ é um homomorfismo $\alpha : k[V] \rightarrow k[\varepsilon]$ tal que $\alpha^{-1}((\varepsilon)) = \mathfrak{m}_P$.

Isso implica que α envia elementos fora de $\mathfrak{m}_P$ em unidades de $k[\varepsilon]$, e portanto se estende unicamente a um homomorfismo

$$\alpha' : \mathcal{O}_{V,P} \rightarrow k[\varepsilon].$$

Esse homomorfismo é local, e toda aplicação local surge dessa forma. $\square$

1.6 Interpretação geométrica

Um elemento de $T_P(V)$ pode ser visto como um ponto da forma

$$P + \varepsilon v,$$

ou seja, uma **deformação infinitesimal** de P dentro de V .

Interpretação da condição $\alpha^{-1}((\varepsilon)) = \mathfrak{m}_P$

Seja $\alpha : k[V] \rightarrow k[\varepsilon]$ um homomorfismo de k -álgebras que representa um vetor tangente em P .

Por definição, a composição

$$k[V] \xrightarrow{\alpha} k[\varepsilon] \longrightarrow k, \quad \varepsilon \mapsto 0$$

coincide com a avaliação no ponto P , isto é,

$$f \mapsto f(P).$$

Passo 1: Forma de $\alpha(f)$

Para todo $f \in k[V]$, podemos escrever

$$\alpha(f) = a + b\varepsilon, \quad a, b \in k.$$

Aplicando o mapa $k[\varepsilon] \rightarrow k$, obtemos:

$$a = f(P).$$

Logo,

$$\alpha(f) = f(P) + b\varepsilon.$$

Passo 2: O ideal (ε)

O ideal $(\varepsilon) \subset k[\varepsilon]$ é dado por

$$(\varepsilon) = \{b\varepsilon \mid b \in k\},$$

ou seja, consiste exatamente dos elementos cuja parte constante é zero.

Passo 3: Cálculo da pré-imagem

Temos:

$$\alpha(f) \in (\varepsilon) \iff f(P) = 0.$$

Portanto,

$$\alpha^{-1}((\varepsilon)) = \{f \in k[V] \mid f(P) = 0\}.$$

Conclusão

Mas o conjunto

$$\{f \in k[V] \mid f(P) = 0\}$$

é exatamente o ideal maximal $\mathfrak{m}_P$ associado ao ponto P . Logo,

$$\alpha^{-1}((\varepsilon)) = \mathfrak{m}_P.$$

Interpretação geométrica

O homomorfismo α pode ser visto como uma deformação infinitesimal do ponto P , da forma

$$\alpha(f) = f(P) + \varepsilon \cdot D(f),$$

onde D captura a direção tangente. A condição acima expressa que as funções que se anulam em P são exatamente aquelas cuja imagem por α é puramente infinitesimal.

Derivações

Definição 1.4 (Derivação). *Seja A uma k -álgebra e M um A -módulo. Uma k -derivação é uma aplicação*

$$D : A \rightarrow M$$

tal que:

1. $D(c) = 0$ para todo $c \in k$;
2. $D(f + g) = D(f) + D(g)$;
3. $D(fg) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$ (regra de Leibniz).

Note que essas condições implicam que D é k -linear (mas não necessariamente A -linear). Denotamos por $\text{Der}_k(A, M)$ o espaço vetorial sobre k de todas as k -derivações $A \rightarrow M$.

Exemplo 1.5. Seja A uma k -álgebra local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, e suponha que $A/\mathfrak{m} \cong k$. Para $f \in A$, denotamos por $f(\mathfrak{m})$ a sua imagem em $A/\mathfrak{m}$. Então $f - f(\mathfrak{m}) \in \mathfrak{m}$, e a aplicação

$$f \mapsto df := (f - f(\mathfrak{m})) \pmod{\mathfrak{m}^2}$$

define uma k -derivação $A \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, pois, módulo $\mathfrak{m}^2$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (f - f(\mathfrak{m}))(g - g(\mathfrak{m})) \\ &= -fg + f(\mathfrak{m})g(\mathfrak{m}) + f(g - g(\mathfrak{m})) + g(f - f(\mathfrak{m})) \\ &= -d(fg) + f \cdot dg + g \cdot df. \end{aligned}$$

Proposição 1.6. Seja $(A, \mathfrak{m})$ como acima. Existem isomorfismos canônicos:

$$\text{Hom}_{\text{alg. locais}/k}(A, k[\varepsilon]) \cong \text{Der}_k(A, k) \cong \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k).$$

Demonstração. A composição

$$k \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \cong k$$

é a identidade. Portanto, como espaço vetorial sobre k , temos a decomposição

$$A \cong k \oplus \mathfrak{m}, \quad f \mapsto (f(\mathfrak{m}), f - f(\mathfrak{m})).$$

Seja $\alpha : A \rightarrow k[\varepsilon]$ um homomorfismo local de k -álgebras, e escreva

$$\alpha(a) = a_0 + D(a)\varepsilon.$$

Por que $a_0 = a(\mathfrak{m})$? Seja $\alpha : A \rightarrow k[\varepsilon]$ um homomorfismo local de k -álgebras. Escrevemos

$$\alpha(a) = a_0 + D(a)\varepsilon, \quad \text{com } a_0 \in k.$$

Como α é um homomorfismo de k -álgebras local, ele induz um morfismo nos quocientes:

$$\bar{\alpha} : A/\mathfrak{m} \longrightarrow k[\varepsilon]/(\varepsilon).$$

Mas temos isomorfismos canônicos

$$A/\mathfrak{m} \cong k \quad \text{e} \quad k[\varepsilon]/(\varepsilon) \cong k,$$

logo $\bar{\alpha}$ é um homomorfismo de k -álgebras $k \rightarrow k$, e portanto é a identidade.

Assim, para todo $a \in A$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & k[\varepsilon] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & k[\varepsilon]/(\varepsilon) \end{array}$$

Portanto, a imagem de a em $A/\mathfrak{m}$ coincide com a imagem de $\alpha(a)$ em $k[\varepsilon]/(\varepsilon)$:

$$a(\mathfrak{m}) = a_0.$$

De fato, a imagem de $\alpha(a) = a_0 + D(a)\varepsilon$ módulo (ε) é simplesmente a_0 , o que prova a igualdade. Como α é um homomorfismo de k -álgebras, temos $a_0 = a(\mathfrak{m})$.

Então:

$$\alpha(ab) = (ab)_0 + D(ab)\varepsilon,$$

e

$$\alpha(a)\alpha(b) = (a_0 + D(a)\varepsilon)(b_0 + D(b)\varepsilon) = a_0b_0 + (a_0D(b) + b_0D(a))\varepsilon.$$

Comparando as expressões, vemos que D satisfaz a regra de Leibniz, logo é uma k -derivação $A \rightarrow k$.

Reciprocamente, dada uma derivação $D : A \rightarrow k$, definimos

$$\alpha(a) = a(\mathfrak{m}) + D(a)\varepsilon,$$

o que fornece um homomorfismo local $A \rightarrow k[\varepsilon]$. Assim, obtemos a primeira bijeção.

Além disso, uma derivação $D : A \rightarrow k$ é nula em k e em $\mathfrak{m}^2$ (pela regra de Leibniz), logo induz uma aplicação k -linear

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow k.$$

Reciprocamente, qualquer aplicação linear $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow k$ define uma derivação por composição

$$A \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k.$$

□

Derivações e o quociente $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Seja $D : A \rightarrow k$ uma k -derivação. Já sabemos que:

- $D(c) = 0$ para todo $c \in k$;
- D satisfaz a regra de Leibniz: $D(fg) = fD(g) + gD(f)$.

(1) D anula $\mathfrak{m}^2$.

Sejam $x, y \in \mathfrak{m}$. Então, como $A/\mathfrak{m} \cong k$, temos $x(\mathfrak{m}) = y(\mathfrak{m}) = 0$. Aplicando a regra de Leibniz:

$$D(xy) = xD(y) + yD(x).$$

Mas $x, y \in \mathfrak{m}$ e $D(y), D(x) \in k$, logo

$$xD(y), yD(x) \in \mathfrak{m}.$$

Como $D(xy) \in k$ e $\mathfrak{m} \cap k = \{0\}$, segue que

$$D(xy) = 0.$$

Portanto, D se anula em $\mathfrak{m}^2$.

(2) D induz uma aplicação em $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Como D é nula em $\mathfrak{m}^2$, ela depende apenas da classe de $x \in \mathfrak{m}$ módulo $\mathfrak{m}^2$. Assim, podemos definir:

$$\overline{D} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k, \quad x \bmod \mathfrak{m}^2 \mapsto D(x).$$

Essa aplicação é bem definida e k -linear.

(3) Reciprocamente.

Seja $\varphi : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow k$ uma aplicação k -linear. Definimos uma aplicação $D : A \rightarrow k$ por composição:

$$A \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\varphi} k,$$

isto é,

$$D(f) := \varphi(f - f(\mathfrak{m}) \bmod \mathfrak{m}^2).$$

(4) Verificação da regra de Leibniz.

Sejam $f, g \in A$. Então, módulo $\mathfrak{m}^2$, vale:

$$(f - f(\mathfrak{m}))(g - g(\mathfrak{m})) \equiv 0.$$

Expandindo,

$$fg - f(\mathfrak{m})g(\mathfrak{m}) \equiv f(g - g(\mathfrak{m})) + g(f - f(\mathfrak{m})) \pmod{\mathfrak{m}^2}.$$

Aplicando φ , obtemos:

$$D(fg) = f(\mathfrak{m})D(g) + g(\mathfrak{m})D(f).$$

Como $f(\mathfrak{m}), g(\mathfrak{m}) \in k$, isso coincide com a regra de Leibniz:

$$D(fg) = fD(g) + gD(f).$$

Portanto, obtemos uma correspondência bijetiva:

$$\mathrm{Der}_k(A, k) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k).$$

Note que $D(f) \in k$. Assim, ao escrever $fD(g)$, interpretamos isso via a estrutura de A -módulo em k induzida pela avaliação em m , isto é,

$$f \cdot \lambda := f(m)\lambda \quad (\lambda \in k).$$

Portanto,

$$f(m)D(g) + g(m)D(f) = fD(g) + gD(f),$$

e a regra de Leibniz pode ser escrita como

$$D(fg) = fD(g) + gD(f).$$

Espaços tangentes e diferenciais

Espaço tangente em variedades afins. Seja V uma variedade algébrica afim, e seja $P \in V$. Denotamos por $\mathfrak{m}_P$ o ideal maximal correspondente em $k[V]$, e por $\mathfrak{n}_P$ o ideal maximal $\mathfrak{m}_P\mathcal{O}_{V,P}$ no anel local $\mathcal{O}_{V,P}$.

Existem isomorfismos canônicos:

$$T_P(V) \cong \mathrm{Der}_k(k[V], k) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2, k),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg. locais}/k}(\mathcal{O}_{V,P}, k[\varepsilon]) \cong \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,P}, k) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P^2, k).$$

Aqui, $k[V]$ atua em k via $k[V] \rightarrow k[V]/\mathfrak{m}_P \cong k$, e $\mathcal{O}_{V,P}$ atua em k via $\mathcal{O}_{V,P} \rightarrow \mathcal{O}_{V,P}/\mathfrak{n}_P \cong k$.

Descrição dos isomorfismos:

- (a) Por definição, $T_P(V)$ é a fibra de $V(k[\varepsilon]) \rightarrow V(k)$ sobre P . Dar um elemento de $T_P(V)$ equivale a dar um homomorfismo

$$\alpha : k[V] \rightarrow k[\varepsilon]$$

tal que $\alpha^{-1}((\varepsilon)) = \mathfrak{m}_P$.

- (b) Tal homomorfismo pode ser escrito como

$$\alpha(f) = f(P) + D_\alpha(f)\varepsilon, \quad f \in k[V],$$

onde $f(P) \in k$ e $D_\alpha(f) \in k$.

A aplicação $D_\alpha : k[V] \rightarrow k$ é uma k -derivação, e induz uma aplicação linear

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow k.$$

- (c) O homomorfismo $\alpha : k[V] \rightarrow k[\varepsilon]$ estende-se unicamente a um homomorfismo local

$$\mathcal{O}_{V,P} \rightarrow k[\varepsilon].$$

Da mesma forma, uma derivação $k[V] \rightarrow k$ estende-se unicamente a $\mathcal{O}_{V,P} \rightarrow k$.

- (d) Os dois últimos espaços estão relacionados pelo isomorfismo natural

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong \mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P^2.$$

Diferencial de um morfismo. Seja $\varphi : V \rightarrow W$ uma aplicação regular. Ela induz uma aplicação

$$\varphi_{k[\varepsilon]} : V(k[\varepsilon]) \rightarrow W(k[\varepsilon]).$$

Se $Q = \varphi(P)$, então φ envia a fibra sobre P na fibra sobre Q , induzindo uma aplicação

$$d\varphi : T_P(V) \rightarrow T_Q(W),$$

chamada de *diferencial de φ em P* .

Descrições equivalentes do diferencial:

- (a) Quando V e W estão imersas em $\mathbb{A}^n$, $d\varphi$ coincide com a descrição clássica via matriz jacobiana.

(b) Como aplicação

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{V,P}, k[\varepsilon]) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{W,Q}, k[\varepsilon]),$$

o diferencial é induzido pelo homomorfismo

$$\varphi^* : \mathcal{O}_{W,Q} \rightarrow \mathcal{O}_{V,P}.$$

(c) Como aplicação

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2, k) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2, k),$$

o diferencial é induzido pela aplicação dual da aplicação

$$\varphi^* : k[W] \rightarrow k[V],$$

que envia

$$\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2.$$

Não singularidade e regularidade

Teorema. Seja P um ponto de uma variedade irredutível V de dimensão d . Todo conjunto de geradores do ideal maximal $\mathfrak{m}_P$ de $\mathcal{O}_{V,P}$ tem pelo menos d elementos, e existe um conjunto de geradores com d elementos se, e somente se, P é não singular.

Definição. Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. Dizemos que A é *regular* se

$$\dim A = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2),$$

onde $k = A/\mathfrak{m}$ é o corpo residual.

Proposição. Um ponto $P \in V$ é não singular se, e somente se, o anel local $\mathcal{O}_{V,P}$ é regular.

Prova. Seja $d = \dim V$.

($\Rightarrow$) Se P é não singular, então pelo Teorema anterior existe um conjunto de geradores de $\mathfrak{m}_P$ com exatamente d elementos. Logo,

$$\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) \leq d.$$

Por outro lado, para qualquer conjunto de geradores, temos $\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) \geq d$. Portanto,

$$\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = d = \dim \mathcal{O}_{V,P},$$

e $\mathcal{O}_{V,P}$ é regular.

($\Leftarrow$) Se $\mathcal{O}_{V,P}$ é regular, então

$$\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = d.$$

Logo, $\mathfrak{m}_P$ admite um conjunto de geradores com d elementos, o que implica, pelo Teorema anterior, que P é não singular. $\square$

Proposição. Seja $P \in V$ um ponto de uma variedade (irredutível) de dimensão d . Então

$$P \text{ é não singular} \iff \dim_k T_P V = d \iff \mathcal{O}_{V,P} \text{ é regular.}$$

Prova. Recorde que

$$T_P V \simeq (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*,$$

logo

$$\dim_k T_P V = \dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2).$$

Assim,

$$\dim_k T_P V = d \iff \dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = d \iff \mathcal{O}_{V,P} \text{ é regular.}$$

Pelo Teorema anterior, $\mathfrak{m}_P$ pode ser gerado por d elementos se, e somente se, P é não singular. Portanto,

$$P \text{ é não singular} \iff \dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = d.$$

Juntando as equivalências, obtemos o resultado. $\square$

Lema de Nakayama. Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local e M um A -módulo finitamente gerado. Se $\mathfrak{m}M = M$, então $M = 0$.

Prova. Seja $x_1, \dots, x_n$ um conjunto de geradores de M . Como $\mathfrak{m}M = M$, cada x_i pode ser escrito como

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{com } a_{ij} \in \mathfrak{m}.$$

Em forma matricial,

$$(I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

onde $A = (a_{ij})$ tem coeficientes em $\mathfrak{m}$.

Como $I - A$ é inversível (pois $\det(I - A) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$), segue que $x_1 = \dots = x_n = 0$. Logo, $M = 0$. $\square$

Proposição. Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano. Então

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d \iff \mathfrak{m} \text{ pode ser gerado por } d \text{ elementos.}$$

Prova.

$(\Rightarrow)$ Seja $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d$ e $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$ uma base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Escolha representantes $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$. Então

$$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_d) + \mathfrak{m}^2.$$

Logo,

$$\mathfrak{m}/(x_1, \dots, x_d) = \mathfrak{m}/((x_1, \dots, x_d) + \mathfrak{m}^2)$$

é anulado por $\mathfrak{m}$. Pelo lema de Nakayama, segue que

$$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_d).$$

$(\Leftarrow)$ Se $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_d)$, então as classes $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$ geram $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ como espaço vetorial sobre k . Logo,

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq d.$$

Por outro lado, qualquer conjunto de geradores de $\mathfrak{m}$ tem cardinalidade $\geq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$,

Lema. Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel local. Então qualquer conjunto de geradores de $\mathfrak{m}$ tem cardinalidade $\geq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Prova. Sejam $x_1, \dots, x_r$ geradores de $\mathfrak{m}$. Então suas classes $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ geram $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ como espaço vetorial sobre k .

De fato, para qualquer $x \in \mathfrak{m}$, escrevemos

$$x = \sum_{i=1}^r a_i x_i \quad (a_i \in A).$$

Reduzindo módulo $\mathfrak{m}^2$, obtemos

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^r \bar{a}_i \bar{x}_i,$$

onde $\bar{a}_i \in k = A/\mathfrak{m}$.

Logo, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ geram $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ como k -espaço vetorial, e portanto

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq r.$$

□

portanto

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d.$$

□

Exemplos de espaços tangentes (via números duais)

A descrição do espaço tangente usando números duais é particularmente conveniente quando a variedade é descrita pelo seu funtor de pontos.

Exemplo (Grupo linear geral). Seja M_n o espaço das matrizes $n \times n$, e I a matriz identidade. Então

$$T_I(\mathrm{GL}_n) = \{ I + \varepsilon A \mid A \in M_n(k) \} \simeq M_n(k).$$

Exemplo (Grupo linear especial). Expandindo o determinante e usando $\varepsilon^2 = 0$, obtemos:

$$\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A).$$

Logo,

$$T_I(\mathrm{SL}_n) = \{ I + \varepsilon A \mid \operatorname{tr}(A) = 0 \} \simeq \{ A \in M_n(k) \mid \operatorname{tr}(A) = 0 \}.$$

Exemplo (Grupo ortogonal). Suponha $\operatorname{char}(k) \neq 2$ e considere

$$\mathrm{O}_n = \{ A \in \mathrm{GL}_n \mid A^t A = I \}.$$

Para $I + \varepsilon A$, temos

$$(I + \varepsilon A)^t (I + \varepsilon A) = I + \varepsilon A^t + \varepsilon A.$$

Portanto,

$$T_I(\mathrm{O}_n) = T_I(\mathrm{SO}_n) = \{ I + \varepsilon A \mid A^t + A = 0 \} \simeq \{ A \in M_n(k) \mid A \text{ é anti-simétrica} \}.$$