

Soma de 2 números na Aritmética de ponto flutuante

Exemplo : $t=5$, $e \in [-6, 6]$, $\beta=10$

$$\begin{aligned} & 0.59593 \cdot 10^5 + 0.10892 \cdot 10^2 \\ &= 0.59593 \cdot 10^5 + 0.00010892 \cdot 10^5 \\ &= 0.59603892 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Resultado:

$0.59604 \cdot 10^5$ para arredonda-
mento

$0.59603 \cdot 10^5$ para truncamento

Lembre-se:

$$\begin{array}{lcl} x \longrightarrow \bar{x} & & \\ & + & \\ y \longrightarrow \bar{y} & \longrightarrow & \bar{x} + \bar{y} \longrightarrow \overline{\bar{x} + \bar{y}} \end{array}$$

Erros na adição:

$$\text{Seja } x = \underbrace{f_x \cdot 10^e}_{\text{representado exatamente}} + \underbrace{g_x \cdot 10^{e-t}}_{\text{representado exatamente}}$$

onde $0.1 \leq f_x < 1$ e $0 \leq g_x < 1$

por ex.: $t = 5$

$$\begin{aligned} x &= 0.59593 \cdot 10^5 + 0.71259 \cdot 10^0 \\ &= 0.59593 \cdot 10^5 + 0.0000071259 \cdot 10^5 \\ &= 0.5959371259 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \begin{cases} 0.59593 \cdot 10^5 & \text{usando truncamento} \\ 0.59594 \cdot 10^5 & \text{usando arredondamento} \end{cases}$$

No Truncamento:

$$|EA_{op}| = |EA_x| = |x - \bar{x}| \\ = |g_x| \cdot 10^{e-t} < 10^{e-t}$$

$$|ER_{op}| = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|}$$

$$= \frac{|g_x| \cdot 10^{e-t}}{|f_x| \cdot 10^e} < \frac{10^{e-t}}{|f_x| \cdot 10^e} \\ \leq \frac{10^{e-t}}{0.1 \cdot 10^e} \quad (\text{porque } |f_x| \geq 0.1) \\ = \frac{10^{e-t}}{10^{e-1}} = 10^{e-t-e+1} = 10^{1-t}$$

Resumo:

$$\boxed{\begin{aligned} |EA_{op}| &< 10^{e-t} \\ |ER_{op}| &< 10^{1-t} \end{aligned}}$$

Para Arredondamento:

$$\bar{x} = \begin{cases} f_x \cdot 10^e & \text{se } |g_x| < \frac{1}{2} \\ f_x \cdot 10^e + 10^{e-t} & \text{se } |g_x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

para $f_x, g_x \geq 0$

Obtemos $|EA_{op}| = |EA_x| \leq \frac{1}{2} 10^{e-t}$

$$\text{e } |ER_{op}| = |ER_x| \leq \frac{1}{2} 10^{e-t}$$

Resultados são válidos também
para multiplicação, subtração
e divisão

Truncamento

$$|EA_{op}| < 10^{e-t}$$

$$|ER_{op}| < 10^{e-t}$$

Arredondamento

$$|EA_{op}| \leq \frac{1}{2} 10^{e-t}$$

$$|ER_{op}| \leq \frac{1}{2} 10^{e-t}$$

No exemplo anterior (arredondamento)

$$x = 0.5959371259 \cdot 10^5$$

$$\bar{x} = 0.59594 \cdot 10^5 \quad t = 5$$

$$|E_A x| = |x - \bar{x}|$$

$$= |0.5959371259 \cdot 10^5 - 0.59594 \cdot 10^5|$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot 0.00001 \cdot 10^5$$

$$= \frac{1}{2} 10^{\underset{e}{1} 5 - \underset{t}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$|E_R x| = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|} \leq \frac{0.000003 \cdot 10^5}{0.59594 \cdot 10^5}$$

$$\leq \frac{0.3 \cdot 10^{-5}}{0.5} = 0.6 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10^{1 - \underset{\uparrow}{5}}$$

ou

$$|E_R x| = \frac{|E_A x|}{|\bar{x}|} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|\bar{x}|}$$
$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0.1 \cdot 10^5} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-5}$$

$\star$

Propagação dos Erros

Até agora, consideramos

$$x = \bar{x}, y = \bar{y}$$

$$\begin{array}{l} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} \end{array} \xrightarrow{*} \bar{x} * \bar{y} \xrightarrow{\uparrow} \overline{\bar{x} * \bar{y}}$$

↑
erro
pequeno

Seja agora

$$x \neq \bar{x}$$

ou $y \neq \bar{y}$

$$\begin{array}{l} x = \bar{x} + EA_x \quad \text{onde } EA_x \neq 0 \\ \text{ou } y = \bar{y} + EA_y \quad \text{onde } EA_y \neq 0 \end{array}$$

Propagação dos Erros

Adição: $x + y \approx$

$$\approx (\bar{x} + EA_x) + (\bar{y} + EA_y)$$

$$= (\bar{x} + \bar{y}) + (EA_x + EA_y)$$

$$\therefore EA_{x+y} \approx EA_x + EA_y$$

$$ER_{x+y} \approx \frac{EA_{x+y}}{\bar{x} + \bar{y}} \approx \frac{EA_x + EA_y}{\bar{x} + \bar{y}}$$

$$= \frac{EA_x}{\bar{x}} \cdot \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + \frac{EA_y}{\bar{y}} \cdot \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right)$$

$$= ER_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + ER_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right)$$

Subtração:

$$EA_{x-y} \approx EA_x - EA_y$$

$$ER_{x-y} \approx ER_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}} \right) - ER_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}} \right)$$

Problema se $\bar{x} \approx \bar{y}$

Multiplicação

$$ER_{xy} \approx ER_x + ER_y$$

Divisão

$$ER_{\frac{x}{y}} \approx ER_x - ER_y$$

Formulas não consideram
o erro de arredondamento/truncar
no passo

$$\bar{x} * \bar{y} \rightarrow \overline{\bar{x} * \bar{y}}$$

erro
pequeno!

denotado
por RA ou RT

Exemplo (arredondamento)

Seja $t=3$, $e \in [-5, 5]$

$$x = 0.8735 \Rightarrow \bar{x} = 0.874 \cdot 10^0$$

$$y = 0.8734 \Rightarrow \bar{y} = 0.873 \cdot 10^0$$

$$EA_{x-y} = (x-y) - (\bar{x} - \bar{y})$$

$$= 10^{-4} - 10^{-3} = 0.0001 - 0.001$$

$$= -0.0009 = -0.9 \cdot 10^{-3}$$

$$ER_{x-y} = \frac{EA_{x-y}}{\bar{x} - \bar{y}} = \frac{-0.9 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}$$

$$= \underline{\underline{-0.9}}$$

erro relativamente
grande em módulo

Lembre-se

$$ER_{x-y} \approx ER_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}} \right) - ER_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}} \right)$$

cancelamento sustrativo

Example:

Sejam $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$

Estime $|ER_u|$ onde $u = x + yz$

numa máquina que usa arredondam.

Seja $\omega = yz$

$$ER_w = ER_yz = \underset{0}{ER_y} + \underset{0}{ER_z} + RA$$

$$ER_x + yz = ER_x + w$$

$$= ER_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{w}} \right) + ER_w \left(\frac{\bar{w}}{\bar{x} + \bar{w}} \right) + RA$$

Então:

$$\begin{aligned} |ER_{x+\omega}| &\leq |ER_{\omega}| \cdot \frac{|\bar{\omega}|}{|\bar{x}+\bar{\omega}|} + |RA| \\ &\leq \frac{1}{2} 10^{1-t} \frac{|\bar{\omega}|}{|\bar{x}+\bar{\omega}|} + \frac{1}{2} 10^{1-t} \\ &\leq \frac{1}{2} 10^{1-t} \left(\frac{|\bar{\omega}|}{|\bar{x}+\bar{\omega}|} + 1 \right) \end{aligned}$$