

Algoritmo (Bisecção)

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e $f(a) \neq f(b)$

Dados iniciais: $[a, b]$, $\varepsilon (> 0)$

$k = 0$

while $(b - a) \geq \varepsilon$ and $|f(\frac{a+b}{2})| \geq \varepsilon$
{

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{if } f(x) \cdot f(b) < 0$$

$$a = x$$

else

$$b = x$$

$$k = k + 1$$

}

$$x = \frac{a+b}{2}$$

← daí obtemos raiz {
com precisão ε

Algoritmo (Bisecção)

Seja $f(x)$ continua em $[a, b]$ e $f(a) \neq f(b)$

Dados iniciais: $[a, b]$, $\varepsilon (> 0)$

$k=0$

while $(b-a) \geq \varepsilon$ and $|f(\frac{a+b}{2})| \geq \varepsilon$
{

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{if } f(x) \cdot f(b) < 0$$

$$a = x$$

else

$$b = x$$

$$k = k + 1$$

}

$$x = \frac{a+b}{2}$$

← daí obtemos raiz {
com precisão ε

Example:

$$f(x) = x^3 - 5x - 3$$

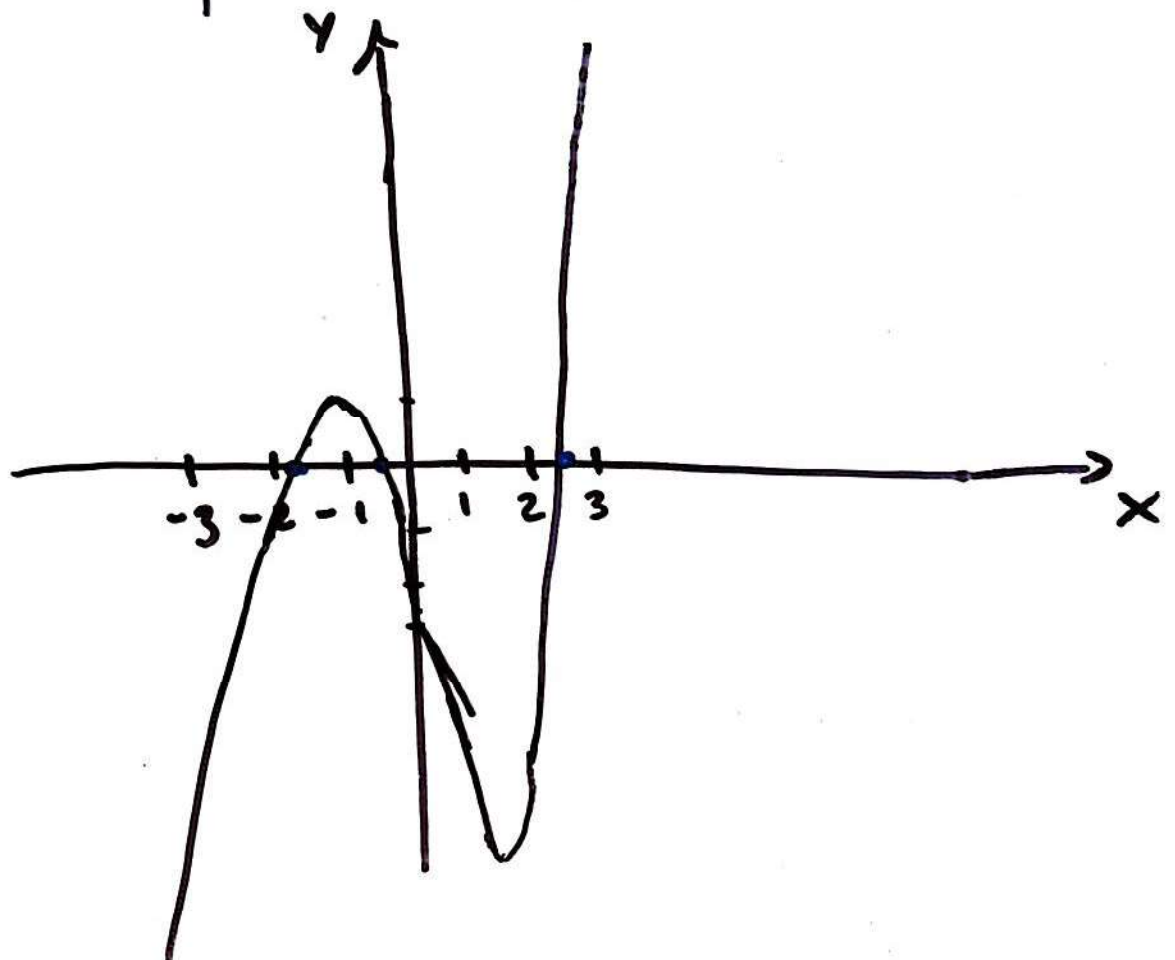
$$0 = f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \approx \pm 1.3$$

extreme

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-15	-1	1	-3	-7	-5	9



Exemplo:

$$f(x) = x^3 - 5x - 3$$

$$I = [2, 3], \epsilon = 10^{-3}$$

$$f(2) < 0, f(3) > 0$$

k	a	b	b-a	x	f(x)
0	2	3	1	2,5	0,12500
1	2,0	2,5	0,5	2,25	-2,8594
2	2,25	2,5	0,25	2,375	-1,4785
3	2,375	2,5	0,125	2,4375	-0,70532
4	2,4375	2,5	0,0625	2,4688	-0,29673
5	2,4688	2,5	0,03125	2,4844	-0,87679 · 10 ⁻¹
6	2,4844	2,5	0,015625	2,4922	0,18206 · 10 ⁻¹
7	2,4844	2,4922	0,0078125	2,4883	-0,34850 · 10 ⁻¹
8	2,4883	2,4922	0,0039063 · 10 ⁻²	2,4903	-0,76702 · 10 ⁻²
9	2,4903	2,4922	0,0019531 · 10 ⁻²	2,4913	0,59420 · 10 ⁻²
10	2,4903	2,4913	0,00097656 · 10 ⁻³	<u>2,4908</u>	

2,4908
 $\epsilon < 10^{-3}$ resultado

Estudo de Convergência do Método da Bisecção

Seja f contínua e

$$a_k < x_k, \xi < b_k$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \xi \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

além disso:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k - a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$$

Então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado

Estimativa do número das iterações:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow e^{k \cdot \ln 2} > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \ln 2 > \ln(b_0 - a_0) - \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow k > \frac{\ln(b_0 - a_0) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$$

Ex.: Seja f contínua com $f(0)^2 \cdot f(1)^3 < 0$
e $\varepsilon = 10^{-3}$

Quantas it's domét. da Biseccão
para obter uma aproximação x_k
de uma raiz ξ de f com $|\xi - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{Resposta: } k > \frac{\ln 1 - \ln 10^{-3}}{\ln 2} \approx 9.9658$$

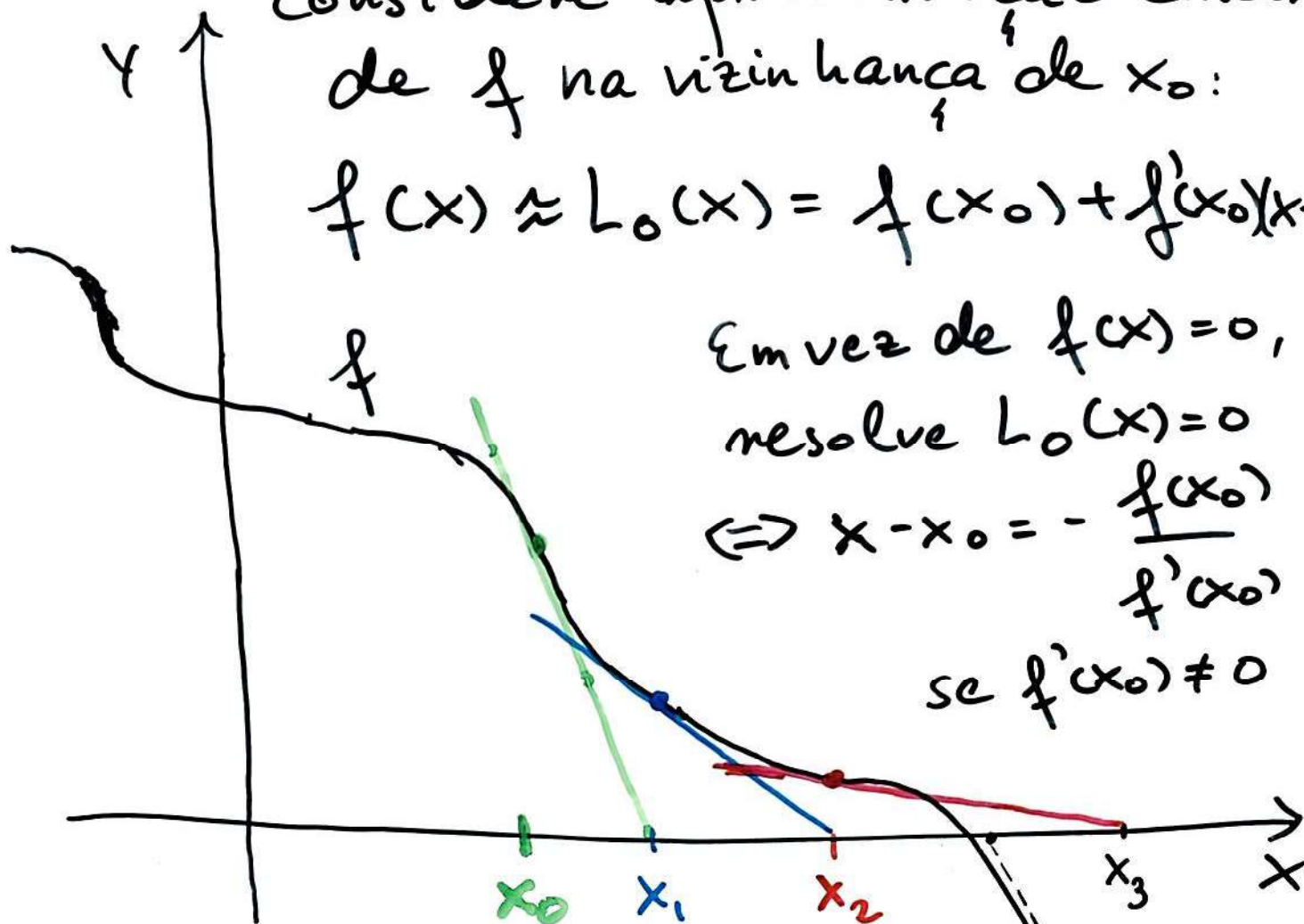
então 10 iterações são suficientes.

O Método de Newton-Raphson

Ideia: Para resolver $f(x) = 0$, considere aproximação linear de f na vizinhança de x_0 :

$$f(x) \approx L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Em vez de $f(x) = 0$,
resolva $L_0(x) = 0$
 $\Leftrightarrow x - x_0 = - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
se $f'(x_0) \neq 0$



Dado x_0 , $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
se $f'(x_0) \neq 0$

Dado x_k ,

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{se } f'(x_k) \neq 0$$

Exemplo:

$$f(x) = e^x - 1$$

$$\xi = 0$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = 0.106530659$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = 0.0055$$

$$x_3 = 1.50 \cdot 10^{-5}$$

$$|e_k| = |x_k - \xi|$$

Teorema:

Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$
contínuas num intervalo I
que contem ^{um} zero ξ de $f(x)$.
e seja $f'(\xi) \neq 0$.

Então, existe $\bar{I} \subset I$ com $\xi \in \bar{I}$
tal que:

$$x_0 \in \bar{I} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$$

se

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= q(x_k) \\ &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

Algoritmo (Newton):

Seja $f(x)$ uma função que satisfaça as hipóteses do seguinte teorema.

Dados iniciais: x_0 (aprox. inicial)
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

if $|f(x_0)| < \varepsilon_1$

$$X = x_0$$

else

{

($k = 1$)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

while $|f(x_1)| \geq \varepsilon_1$ and $|x_1 - x_0| \geq \varepsilon_2$

{

$$x_0 = x_1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

($k = k + 1$)

}

$$X = x_1$$

Exemplo:

$$f(x) = x^3 - 6x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$$

passo de Newton:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{1}{3} \frac{x^3 - 6x + 3}{x^2 - 2} \end{aligned}$$

$$x_0 = 1.5, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$$

$1 + .k$	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
0	1.5	2.6250	-
1	5	98	3.5
2	3.5797	27.3933	-1.4203
3	2.7354	7.0543	-0.8444
4	2.3064	1.4308	-0.4289
5	2.1628	0.1399	-0.1437
6	2.1454	0.0020	-0.0174
7	2.1451	4.0624 $\cdot 10^{-7}$	-2.5124 $\cdot 10^{-4}$

Ordem de Convergência do Mét. de Newton - (Raphson)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_{k+1} - \xi}_{e_{k+1}} = \underbrace{x_k - \xi}_{e_k} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Taylor:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(c_k)}{2} (x - x_k)^2 \text{ para um } c_k \text{ entre } x \text{ e } x_k$$

$$0 = f(\xi) = f(x_k) - f'_{\wedge}(x_k, \xi) + \frac{f''(c_k)}{2} (x_k - \xi)^2$$

$$\Rightarrow f(x_k) = f'(x_k) e_k - \frac{f''(c_k)}{2} e_k^2$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - \frac{f''(c_k)}{2 f'(x_k)} e_k^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(c_k)}{f'(x_k)} e_k^2 = e_{k+1}$$
$$\Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(c_k)}{f'(x_k)}$$

Supor que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \xi$ porque c_k
é entre x_k e ξ .

Sejam as condições do teorema
satisfeitas. Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{c_k^2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f''(c_k)|}{|f'(x_k)|}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} |f''(\lim_{k \rightarrow \infty} c_k)|}{|f'(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)|} = \frac{\frac{1}{2} |f''(\xi)|}{|f'(\xi)|}$$

$\therefore$ convergência quadrática

Exemplo (Newton)

Vamos utilizar Matlab no formato ponto flutuante com $t=5$.

$$f(x) = e^x - \ln x - 3, \text{ onde } x > 0$$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$$

k	x_k	$ f(x_k) $	$ x_k - x_{k-1} $
0	$0.10000 \cdot 10^1$	$0.28172 \cdot 10^0$	—
1	$0.11640 \cdot 10^1$	$0.50747 \cdot 10^{-1}$	$0.16395 \cdot 10^0$
2	$0.11423 \cdot 10^1$	$0.92076 \cdot 10^{-3}$	$0.21655 \cdot 10^{-1}$
3	$0.11419 \cdot 10^1$	$0.32411 \cdot 10^{-6}$	

$< 10^{-4}$
PARE!

Resultado:

um dos zeros é aproximadamente

1.1419

Exemplo

Considere as seqüências $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$

$$\{x_k\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$\{y_k\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \dots$$

$$\text{Obs.: } x_{k+1} = \frac{1}{2} x_k \quad k=1, 2, \dots$$

$$y_{k+1} = (y_k)^2 \quad k=1, 2, \dots$$

Qual é a seqüência que converge mais rapidamente para 0?

$$L = 0$$

$$|e_k| = |x_k - L| = |x_k|$$

1. Para x_k temos

$$|e_{k+1}| = \frac{1}{2} |e_k|$$

2. Para y_k temos

$$|e_{k+1}| = e_k$$

Def: (Ordem de convergência Linear)

Seja $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$

e $e_k = x_k - \xi \neq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$

Se existir $0 < C < 1$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{k+1}}{e_k} \right| = C$$

então temos **convergência linear**

Se existir $0 \leq C < 1$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{k+1}}{e_k} \right| = C$$

então temos **convergência pelo menos Linear**

Def: (Ordem de convergência p)

Seja $\{x_k\}$ convergente
Se existir $C > 0$ e $p \geq 1$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{k+1}}{e_k^p} \right| = C$$

então $\{x_k\}$ converge com

ordem de convergência p

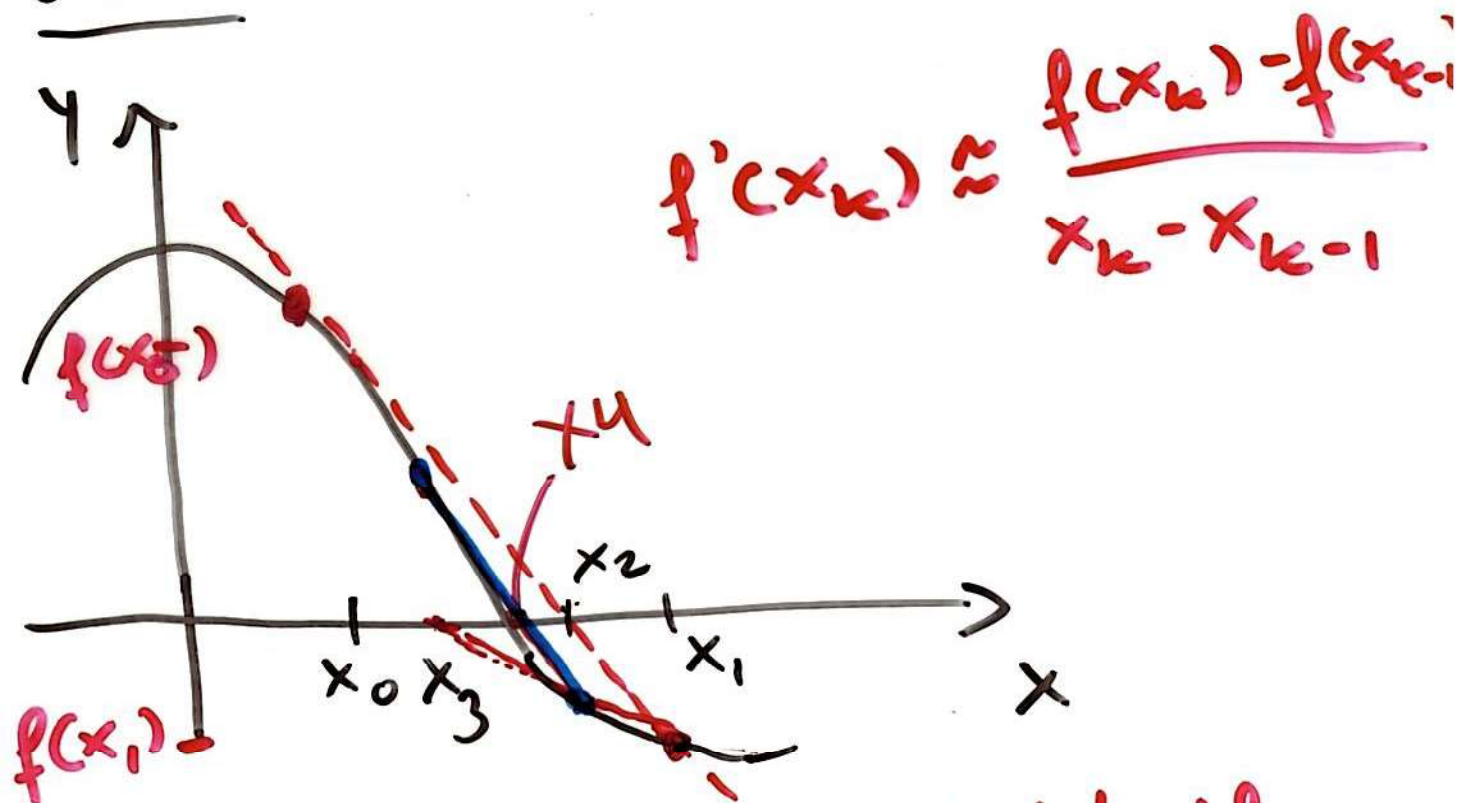
C é chamado constante assintótica de erro.

Def.: (Ordem de convergência de um método)

Se a ordem de convergência é p
para todas seqüências convergentes
geradas pelo método,
então o método tem ordem de
convergência p

Método da Secante

Ideia



muitas vezes, $f'(x)$ é difícil de calcular.

Por isso, substituímos $f'(x_k)$

$$\text{por } \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$p(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} (x_k - x_{k-1})$$

$$q(x_k) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

O mét. da secante é muito similar ao mét. de Newton e tem condições de convergência similares. Obviamente, o mét. de Secante tb pode divergir se

$$f(x_k) \approx f(x_{k-1})$$

Ordem de convergência do mét. da Secante:

$$p = 1.618...$$

Algoritmo do Mét. da Secante

Dados iniciais:

x_0, x_1 (aprox.'s iniciais)

ϵ_1, ϵ_2 precisões

if $|f(x_0)| < \epsilon_1$

$x = x_0$

else

{

($k = 1$)

while $|f(x_1)| \geq \epsilon_1$ and $|x_1 - x_0| \geq \epsilon_2$

{

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} (x_1 - x_0)$$

$$x_0 = x_1$$

$$x_1 = x_2$$

($k = k + 1$)

}

}

$x = x_1$

Exemplo:

$$f(x) = e^x - 1, \quad x_0 = -0.5, \quad x_1 = 0.5$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1})$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
0	-0.5	-0.3935	-
1	0.5	0.6487	1
2	-0.1224	-0.1153	-0.6224
3	-0.0285	-0.0281	0.0939
4	0.0018	0.0018	0.0303
5	$-2.569 \cdot 10^{-5}$ $= -0.2569 \cdot 10^{-4}$	$-0.2569 \cdot 10^{-4}$	(-0.0018)

$< 10^{-4}$
pare!

Exemplo

$$f(x) = x^3 - 5x - 3$$

$$x_0 = 2, x_1 = 3, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-3}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
0	2	-5	-
1	3	9	1
2	2.3571	-1.6891	-0.6429
3	2.4587	-0.4298	0.1016
4	2.4934	0.0345	0.0347
5	<u>2.4908</u>	$-6.1568 \cdot 10^{-4}$	

$1. \cdot 10^{-3}$
pare!

$$f(x) = 4 \sin(x) - e^x, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-5}$$

	Bisseção	Newton	Secante
Dados Iniciais	$[0, 1]$	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0$ $x_1 = 1$
$\bar{x}$	0.37055878	0.370558084	0.370558098
$f(\bar{x})$	$-1.3755 \cdot 10^{-5}$	$-2.7632 \cdot 10^{-6}$	$5.8100 \cdot 10^{-9}$
Erro em x	$7.6294 \cdot 10^{-6}$	$1.3863 \cdot 10^{-4}$	$5.7404 \cdot 10^{-6}$
Número de Iterações	17	3	7

Comparação entre os Métodos

Bisecção

Newton

Secante

Garantias
de Convergência

Rapidez de
Convergência

Esforço
computacional
por iteração_i

Convergência
garantida

convergência
não é
garantida

não
garantida

relativamente rápido

relativam.
rápido

ordem 1.618.

lento

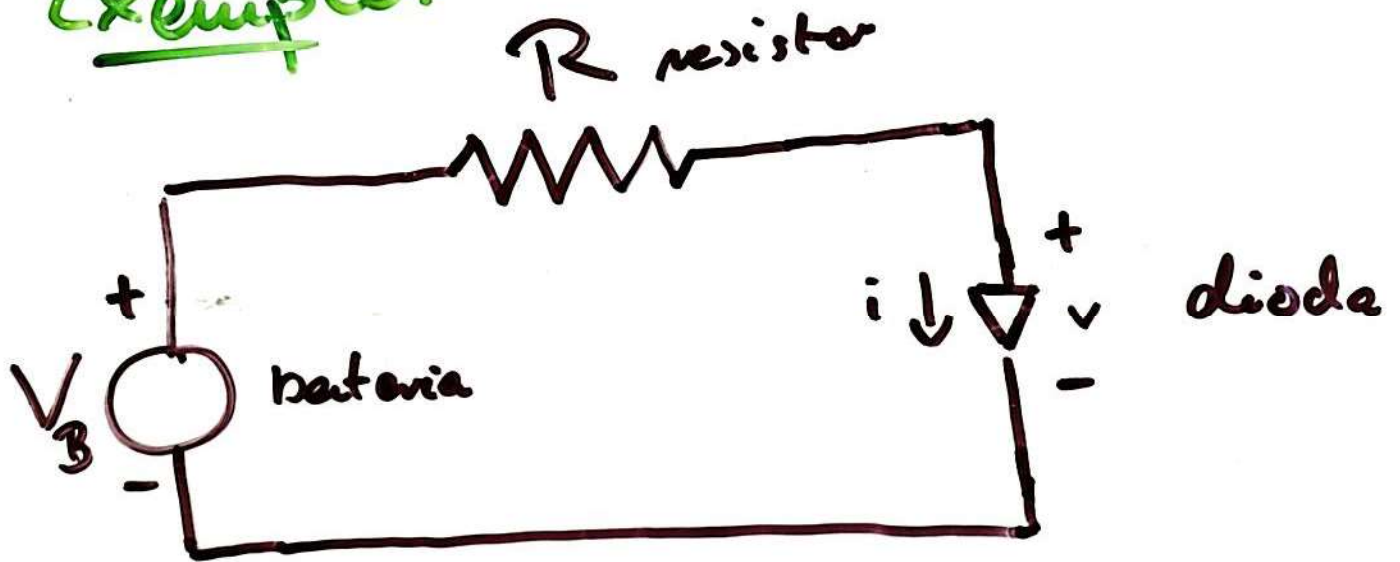
alto

baixo

medio

relativ.
alto

Exemplo:



Circuito a diodo

Seja $V_B = 2.0V$ e $R = 50\Omega$

pela lei de Kirchhoff:

$$V_B = iR + v$$

temos também:

$$i = I_s (e^{cv} - 1)$$

Onde I_s = intensidade da corrente
de saturação reversa - 9
valor típico $I_s = 10^{-9}$ A
 c uma constante
normalmente $c \approx 40$

$$\text{Seja } f(v) = iR + v - V_B$$

A tensão no circuito é o zero de $f(v)$.

Projeto 1:

Aplique o método de Newton para achar a tensão no circuito com os dados nesse exemplo e

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-9} \text{ Utilize}$$

a forma tabelar apresentada na aula.

Podemos reparar neste exemplo que o método de Newton tem ordem de convergência quadrática? Comente utilizando os dados do exemplo.